

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali



Corso di laurea in Fisica Applicata

Elaborato Finale

**Realizzazione e caratterizzazione
di un risonatore LC superconduttore
ad alto fattore di merito**

Relatore

Prof. G. A. Prodi

Correlatore

Dott. Paolo Falferi

Laureando

Antonio Pontin

Anno Accademico 2004-2005

Indice

| | |
|--|------------|
| Introduzione | iii |
| 1 Motivazioni scientifiche per lo sviluppo di un risonatore ad alto fattore di merito | 1 |
| 2 Risonatore LC | 9 |
| 2.1 il Fattore di merito | 11 |
| 2.2 Risonatore a bobina superconduttrice | 13 |
| 2.3 Risonatore reale | 14 |
| 3 Apparato sperimentale | 18 |
| 3.1 Risonatore | 18 |
| 3.1.1 Dimensionamento bobina superconduttrice | 22 |
| 3.1.2 Preparazione | 24 |
| 3.2 Amplificatore SQUID ed eccitatore | 25 |
| 3.2.1 Quantizzazione del flusso e giunzioni Josephson | 26 |
| 3.2.2 dc SQUID | 27 |
| 3.2.3 Configurazione | 30 |
| 3.3 Amplificatore Lock-in | 32 |
| 3.4 Discendente e schermi | 34 |
| 3.5 Criostato | 35 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Metodo di misura | 37 |
| 5 | Caratterizzazione del risonatore alla temperatura dell'elio liquido | 40 |
| 5.1 | Misure fattore di qualità | 41 |
| 5.2 | Misura capacità parassita di una treccia di filo di niobio e dell'angolo di perdita del formvar | 44 |
| 5.3 | Stima coefficiente di accoppiamento induttivo | 46 |
| 6 | Fattore di merito a temperature ultra-criogeniche | 48 |
| 6.1 | Osservazione della dipendenza del Q dalla temperatura | 48 |
| 6.2 | Analisi delle possibili cause di deterioramento del fattore di qualità | 51 |
| A | Quantizzazione del flusso | 55 |
| B | Le giunzioni Josephson | 58 |
| | Bibliografia | 61 |

Introduzione

L'obiettivo di questo elaborato consiste nel realizzare e testare un risonatore LC superconduttore che presenti un fattore di qualità superiore al milione ad una frequenza di risonanza di circa $1kHz$, cioè vicina alla frequenza di risonanza della maggior parte delle antenne criogeniche per la rilevazione di onde gravitazionali; e presentare sinteticamente i risultati sperimentali, ottenuti fino ad oggi, volti ad individuare le cause di deterioramento del fattore di qualità elettrico a temperature ultra-criogeniche in risonatori di questo tipo.

Lo sviluppo del risonatore è stato centrato prevalentemente sulla realizzazione della bobina superconduttrice e nella sua caratterizzazione; queste misure sono state effettuate alla temperatura dell'elio liquido. Successivamente, il sistema così realizzato, è stato utilizzato in un refrigeratore a diluizione che presenta uno spazio più ristretto per l'alloggiamento del risonatore. Questo fattore è stato tenuto in considerazione in fase di progettazione in aggiunta ai più stretti vincoli imposti dalla necessità di limitare le dissipazioni.

Nel capitolo 1 vengono presentati i motivi generali che spingono a sviluppare risonatori LC superconduttori ad alto fattore di merito.

Nel capitolo 2 viene introdotto il modello per il risonatore considerato.

Nel capitolo 3 si descrive l'apparato sperimentale utilizzato per la carat-

terizzazione.

Nel capitolo 4 viene illustrato il metodo di misura utilizzato.

Nel capitolo 5 vengono discussi i risultati sperimentali ottenuti durante il lavoro di tesi.

Infine, nel capitolo 6 vengono presentati altri risultati sperimentali rilevanti per lo sviluppo di risonatori ad alto fattore di merito a temperature ultra-criogeniche.

Capitolo 1

Motivazioni scientifiche per lo sviluppo di un risonatore ad alto fattore di merito

Un'antenna risonante per onde gravitazionali è, in sostanza, una barra metallica di alcune tonnellate che risuona longitudinalmente ad una frequenza di circa 1kHz, con un fattore di qualità tra 10^6 e 10^7 alla temperatura dell'elio liquido. L'obiettivo di questi rivelatori è misurare l'impulso di onde gravitazionali che può essere generato nel collasso stellare nel gruppo di galassie locali o durante la cattura di materia, per esempio, da parte di buchi neri o di stelle di neutroni; questo si traduce nel dover rilevare variazioni dell'ampiezza di vibrazione delle estremità dell'antenna dell'ordine di $10^{-20} \div 10^{-21}$ m.

La barra cilindrica, è costruita con una lega di alluminio arricchito al magnesio (Al 5056), materiale che presenta basse dissipazioni meccaniche; le vibrazioni meccaniche vengono convertite in segnale elettrico da un trasdut-

tore capacitivo anch'esso risonante alla frequenza dell'antenna, per garantire un'alta efficienza nel trasferimento dell'energia dalla barra all'amplificatore del segnale. Il segnale così prodotto dal trasduttore capacitivo è applicato all'induttanza di ingresso di un amplificatore SQUID ($L_{in} \sim 1\mu H$) tramite un trasformatore superconduttore, che provvede al necessario adattamento di impedenza [2].

Il trasduttore capacitivo è costituito da un disco vibrante libero ai bordi, che costituisce una delle armature di un condensatore ed è collegato tramite il centro ad una faccia della barra, a cui è solidale l'altra armatura, vedi fig. 1.1. Barra e trasduttore formano un sistema di due oscillatori che devono risultare ben accoppiati. La frequenza ν_t del più basso modo flessurale del disco dipende anche dalla tensione di polarizzazione V_b applicata al trasduttore [1]; questa relazione assieme ad un opportuno dimensionamento permette la necessaria sintonizzazione tra le due risonanze, in particolare se $\nu_b = \nu_t$, dove ν_b è la frequenza del primo modo longitudinale della barra, il trasferimento di energia da un oscillatore all'altro è continuo e totale. Le frequenze (ν_+ e ν_-) dei risultanti modi normali di vibrazione sono spaziate di circa $\nu_b\sqrt{\mu}$, dove μ è il rapporto tra le masse efficaci del disco del trasduttore e della barra.

Come primo elemento di amplificazione del segnale viene generalmente utilizzato un dc SQUID, in quanto opera a temperature criogeniche presentando una maggiore sensibilità rispetto ad altri amplificatori. Il segnale è poi rilevato da un amplificatore differenziale FET e successivamente raccolto da un amplificatore lock-in. È stato osservato che tra le induttanze di ingresso e di feedback dell'amplificatore SQUID si verifica un accoppiamento spurio, il quale tende ad alterare, anche fino all'instabilità, il fattore di merito meccanico della barra agendo tramite il trasformatore superconduttore e il trasduttore; questo effetto deve quindi essere controllato utilizzando una rete

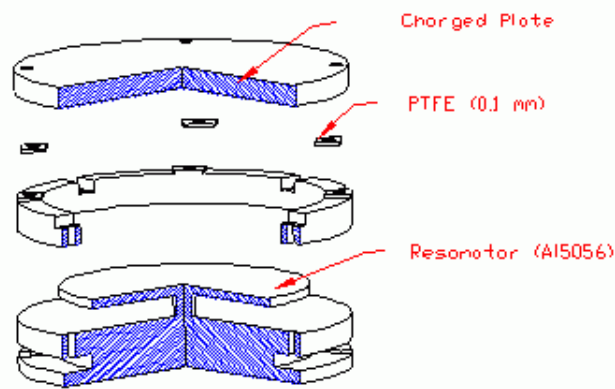


Figura 1.1: Esempio di trasduttore capacitivo a fungo.

di smorzamento capacitiva che annulla l'instabilità dovuta alla parte reale dell'impedenza dinamica di ingresso dello SQUID, senza aumentare significativamente il rumore. In fig. 1.2 è possibile vedere lo schema del sistema di rivelazione di un'antenna per onde gravitazionali.

Recenti sviluppi prevedono al posto di un singolo amplificatore SQUID l'utilizzo di un amplificatore SQUID a doppio stadio in cui il segnale del primo viene amplificato dal secondo un modo da rendere trascurabile il contributo di rumore dell'elettronica a temperatura ambiente [3].

L'induttanza primaria del trasformatore e la capacità del trasduttore formano un oscillatore elettrico LC; può essere dimostrato [4] che il fattore di rumore termico Q/T , dove Q è il fattore di qualità dell'oscillatore LC e T la sua temperatura, è un parametro fondamentale per la sensibilità dell'antenna; per raggiungere la sensibilità limite permessa dagli attuali SQUID usati nei rivelatori, che mirano ad operare con $T \sim 0,1K$, il fattore di qualità del risonatore LC deve essere dell'ordine di 10^6 comparabile, quindi, con il Q meccanico della barra e del trasduttore; oltre a ciò il rumore prodotto da questo risonatore LC deve corrispondere al rumore termico associato alle sue

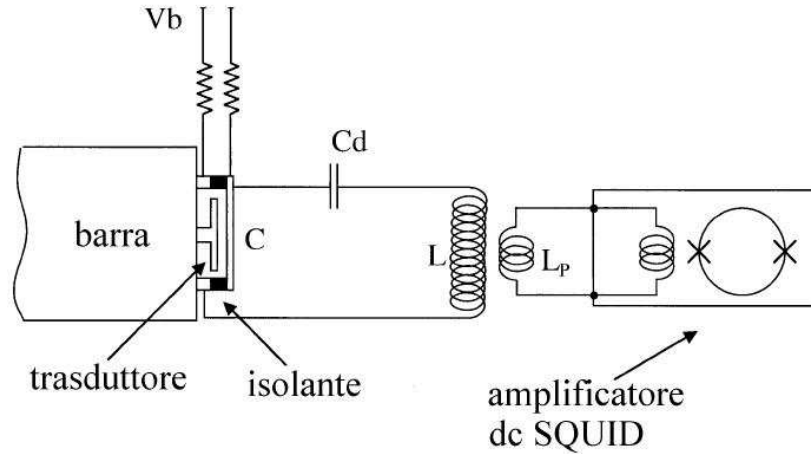


Figura 1.2: Schema della catena di trasduzione di un rivelatore di onde gravitazionali con trasduttore capacitivo e dc SQUID usato come amplificatore a basso rumore.

dissipazioni. A queste condizioni è utile sintonizzare la frequenza di risonanza del circuito LC sulla risonanza del sistema barra-trasduttore con il risultato di ampliare la banda sensibile del rivelatore[5].

A prova di ciò è conveniente mostrare i risultati di alcune simulazioni numeriche in cui la sensibilità del rivelatore AURIGA, attualmente in operazione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN, viene espressa con la sua temperatura efficace T_{eff} . Questa, moltiplicata per la costante di Boltzmann equivale alla minima energia (rilasciata da un'onda gravitazionale impulsiva) rivelabile dal rivelatore. L'importanza, per la sensibilità del rivelatore AURIGA, di avere un modo elettrico ad alto Q sintonizzato su quelli meccanici ed operare ad una temperatura di $100mK$, appare evidente nelle successive tabelle.

Esaminando la tab. 1.1, si nota immediatamente l'importanza di avere

| 4, 5K - Modi tunati | |
|---------------------|-------------------|
| Q_{el} | $T_{eff} (\mu K)$ |
| 100000 | 580 |
| 450000 | 288 |
| 3000000 | 148 |

Tabella 1.1: *Temperatura efficace per alcuni valori del fattore di qualità elettrico.*

un elevato fattore di merito; la seconda riga in tabella corrisponde alla configurazione attuale del rivelatore AURIGA, al quale si può confrontare la temperatura efficace nel caso in cui il modo elettrico non sia sintonizzato, quindi, con una frequenza di risonanza del risonatore LC sufficientemente distante da $1kHz$ (vedi tab. 1.2).

| 4, 5K - Modi non tunati - $Q = 450000$ | |
|--|-------------------|
| $\nu_{el} (Hz)$ | $T_{eff} (\mu K)$ |
| 1500 | 647 |
| 2000 | 1055 |

Tabella 1.2: *Temperatura efficace per frequenze di risonanza distanti dalla risonanza della barra.*

Confrontando i valori nelle due tabelle risulta chiaro come si possa ottenere una sensibilità migliore sintonizzando il modo elettrico solo nel caso in cui il suo fattore di qualità sia sufficientemente elevato; infatti, la temperatura efficace nel caso in cui il Q è dell'ordine di 10^5 nella configurazione sintonizzata è confrontabile al valore che si otterrebbe nella configurazione non sintonizzata con un frequenza di risonanza di $1500Hz$.

Come si può vedere nella tab. 1.3, i valori di temperatura efficace cambiano drasticamente quando si ipotizza una temperatura a regime del rivelatore di $100mK$.

| 0, 1K - Modi tunati | |
|---------------------|-------------------|
| Q_{el} | $T_{eff} (\mu K)$ |
| 100000 | 14 |
| 450000 | 7,5 |
| 3000000 | 4,5 |

Tabella 1.3: *Temperatura efficace per alcuni valori del fattore di qualità elettrico per una temperatura a regime del rivelatore di $100mK$.*

Da questi dati risulta chiaro come i risonatori a basse perdite operanti a temperature criogeniche giochino un ruolo importante nei rivelatori risonanti per onde gravitazionali con trasduttore capacitivo.

Per questo motivo sono studiati da diversi anni, nel '94 è stato presentato [6] un risonatore LC con un fattore di qualità dell'ordine di 10^6 nel range di frequenza da $250 \div 1500$ Hz. Sono state testate due bobine preparate con filo di Nb-Ti ricoperto con formvar (diametro totale del filo $100\mu m$) avvolto su un supporto cilindrico di teflon; i risultati dei lavori precedenti sui risonatori attribuivano, concordemente, le dissipazioni maggiori all'isolante del filo superconduttore usato nella bobina, quindi, sono state usate particolari precauzioni nella preparazione della bobina per ridurre la capacità parassita. Come primo accorgimento venne usato un passo di $200\mu m$ in modo da distanziare le singole spire l'una dall'altra, venne poi inserito un foglio di teflon di $100\mu m$ di spessore a dividere ogni strato di avvolgimenti dal successivo. Come elemento capacitivo sono stati usati condensatori al teflon commerciali

con valori di capacità da 3,3 a 150 nF. L'alloggiamento del risonatore era formato da un contenitore cilindrico di rame suddiviso in tre compartimenti, uno per la bobina, uno per i/il condensatore, e l'ultimo per il magnetometro SQUID. Le pareti del contenitore erano rivestite sia internamente che esternamente da Pb7%Sn elettrodeposto (superconduttore a $T < 7K$), in modo da funzionare sia come schermo superconduttore per le radiazioni elettromagnetiche ambientali, sia per impedire dissipazioni a causa di correnti parassite. Tutto il sistema era mantenuto alla temperatura di 4,2K.

La misura venne eseguita eccitando l'oscillatore alla sua frequenza di risonanza e lasciandolo successivamente decadere liberamente. Venne misurata la costante di tempo del risultante decadimento esponenziale, dal quale si ricava il fattore di qualità come $Q = \pi\nu\tau$ dove ν è la frequenza di risonanza e τ è la costante di tempo.

I risultati sperimentali mostrano per entrambe le bobine un fattore di qualità $\sim 1,2 \cdot 10^6$ ad una frequenza di 100Hz, mentre per frequenze più vicine alla risonanza del rivelatore di onde gravitazionali il Q risulta molto più basso dell'ordine di $4,4 \cdot 10^5$ per la prima bobina e $2,8 \cdot 10^5$ per la seconda. Venne inoltre misurata la capacità parassita risultando per entrambe le bobine dell'ordine di 30pF.

Più recentemente sono stati svolti dei test nei laboratori dell'INFN di Legnaro per sviluppare lo schema di rivelazione a tre modi (il modo elettrico è sintonizzato sui modi meccanici di barra e trasduttore) da introdurre nel rivelatore AURIGA. I test, svolti ad una temperatura compresa tra 4,2 e 2K, hanno dimostrato che un sistema di questo tipo è realizzabile e allarga la banda sensibile anche con un fattore di qualità di $5 \cdot 10^5$. Lo schema di rivelazione a tre modi è stato quindi implementato nel rivelatore, in presa dati dal dicembre 2003 [5]. Ci si aspettava, inoltre, che ulteriori miglioramenti del

fattore di qualità elettrico venissero dall'impiego a temperature dell'ordine di $100mK$.

Misure sperimentali del fattore di merito di un risonatore LC a temperature ultra-criogeniche hanno invece mostrato un peggioramento del fattore di qualità al diminuire della temperatura. Il risonatore utilizzato era composto da una capacità di $32,9nF$, ottenuta con un parallelo di 7 condensatori commerciali da $4,7nF$ in alluminio e teflon, e da una bobina a tre strati su dieci settori di induttanza $L = 10mH$, per una frequenza di risonanza risultante di $10kHz$. L'alloggiamento era realizzato da un contenitore cilindrico di rame rivestito sia internamente che esternamente da $Pb7\%Sn$ elettrodeposto; tutto il sistema era inserito in un refrigeratore a diluizione.

L'intento di portare il rivelatore AURIGA ad una temperatura di lavoro a regime di $100mK$, in un prossimo futuro, rende fondamentale comprendere appieno l'aumento delle dissipazioni al diminuire della temperatura, in particolare nel range ultra-criogenico, in modo da poter realizzare un risonatore che permetta di ottenere la migliore sensibilità possibile.

Capitolo 2

Risonatore LC

Consideriamo un oscillatore elettrico RLC serie isolato dall'esterno; l'equazione che descrive l'andamento della carica in funzione del tempo in questo sistema è

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = 0 \quad (2.1)$$

espressione facilmente identificabile come l'equazione di un moto oscillatorio armonico smorzato. Cercando la soluzione di questa equazione differenziale, si trova un'espressione generale del tipo

$$I(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t} \quad (2.2)$$

con $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta}$

in cui a seconda del valore assunto da Δ si possono distinguere tre casi:

$\Delta > 0$ comportamento sovrasmorzato in cui la soluzione esprime un moto non oscillatorio con ampiezze tendenti a zero;

$\Delta = 0$ smorzamento critico, ovvero il più piccolo valore che può assumere R (o in generale l'attrito viscoso) affinché il moto del sistema non sia oscillante; la velocità con cui l'ampiezza tende asintoticamente a zero è più alta che nel caso sovrasmorzato;

$\Delta < 0$ andamento sottosmorzato, che coincide con una oscillazione smorzata.

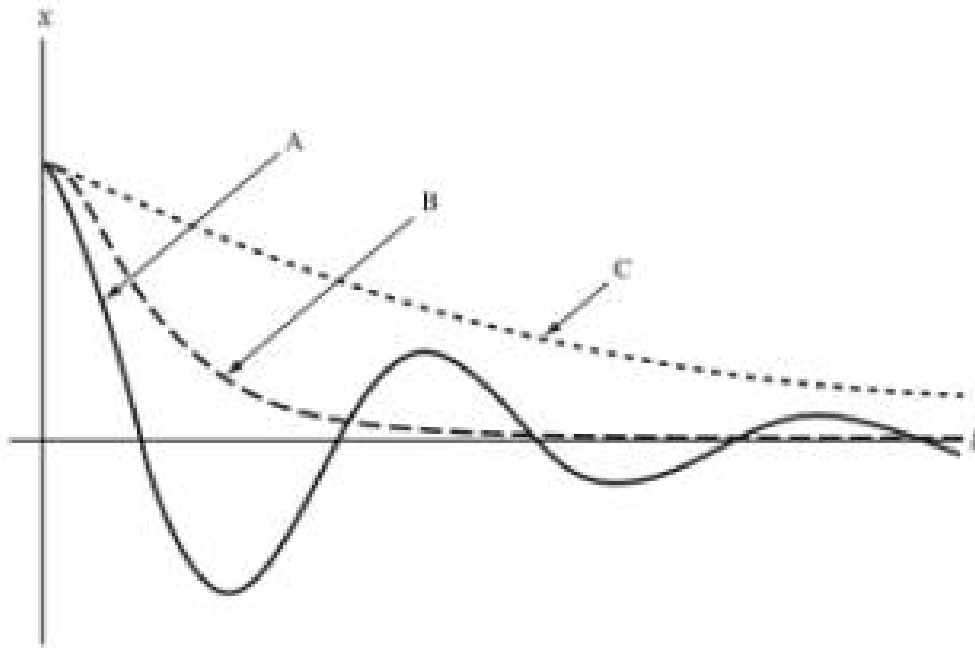


Figura 2.1: A) sottosmorzato; B) smorzamento critico C)sovrasmorzato

In modo del tutto generale se si cercano le soluzioni che descrivono il moto di un oscillatore smorzato forzato, si ritrovano, abbastanza facilmente, le soluzioni del moto non forzato più la soluzione particolare determinata dalla forma della sollecitazione forzata. Si può facilmente vedere che tutte e

tre le soluzioni dello smorzato tendono a zero dopo un certo tempo t , quindi, nell'ambito del moto forzato si possono considerare transitorie; a regime il sistema oscilla con la stessa frequenza della sollecitazione forzante.

Particolarmente interessante è il fenomeno della risonanza.

Prendendo in considerazione una sollecitazione forzante sull'oscillatore, per esempio di tipo sinusoidale, si trova che l'ampiezza di oscillazione a regime del sistema ha un massimo in corrispondenza della pulsazione di oscillazione libera, che in questo caso prende il nome di pulsazione di risonanza.

Nel caso del circuito RLC si trova facilmente che la pulsazione di risonanza è

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.3)$$

quando la frequenza della sollecitazione, in questo caso una tensione, corrisponde a ω_0 , oltre ad avere l'ampiezza della risposta a regime massima, si trova che il circuito ha un comportamento puramente resistivo, nel senso che la corrente che circola all'interno del circuito è in fase con la tensione applicata.

2.1 il Fattore di merito

Si consideri l'energia iniziale immagazzinata in un circuito risonante, la si indichi con U_i , e sia U_d l'energia dissipata in un periodo dallo stesso circuito; si definisce *fattore di merito* (o *fattore di qualità*) del circuito considerato la quantità

$$Q = 2\pi \frac{U_i}{U_d} \quad \text{con} \quad \omega = \omega_o \quad (2.4)$$

dove si intende che il rapporto U_i/U_d deve essere calcolato in corrispondenza della pulsazione di risonanza della rete. Per stabilire il fattore di merito del circuito RLC serie si consideri l'energia immagazzinata nella bobina, se la corrente $i(t)$ che circola è

$$i(t) = I \cos(\omega t) \quad (2.5)$$

allora l'energia iniziale immagazzinata nel circuito è

$$U_i = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.6)$$

Per valutare l'energia dissipata in un periodo, consideriamo come unico elemento che dissipa energia la resistenza R; in corrispondenza della corrente $i(t)$ questo componente dissiperà istantaneamente una potenza

$$p(t) = Ri^2(t) = RI^2 \cos^2(\omega t) \quad (2.7)$$

da cui si può calcolare l'energia dissipata integrando su un periodo

$$U_d = \int_0^{T_0} p(t) dt = \pi \frac{RI^2}{\omega_0} \quad (2.8)$$

dove T_0 indica il periodo $2\pi/\omega_0$ alla pulsazione di risonanza. Dalla definizione segue, quindi, che il fattore di merito del circuito RLC serie vale

$$Q = 2\pi \frac{U_i}{U_d} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (2.9)$$

inoltre sostituendo l'espressione 2.3 per la pulsazione di risonanza, nell'equazione precedente risulta anche

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (2.10)$$

2.2 Risonatore a bobina superconduttrice

Si consideri, ora, l'equazione del moto del circuito RLC introdotta all'inizio e la si esprima in funzione della pulsazione di risonanza e del fattore di merito

$$\dot{I} + \frac{\omega_0}{Q} I + \omega_0^2 q = 0 \quad (2.11)$$

prendendo in considerazione solo in caso sottosmorzato, che in base ai nuovi parametri si verifica quando $Q > 1/2$, si trovano oscillazioni smorzate del tipo

$$I = I_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} e^{\pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t} \quad (2.12)$$

la frequenza di oscillazione è uguale alla frequenza di risonanza solo nel caso ideale di dissipazione nulla, cioè nel caso limite di Q infinito, tuttavia nel-

l'ipotesi di $Q \gg 1$ la discrepanza diventa sperimentalmente trascurabile essendo dell'ordine di $1/Q$. In questa approssimazione il fattore di qualità risulta proporzionale alla costante di tempo del decadimento in ampiezza

$$Q = \frac{1}{2}\omega_0\tau = \pi\nu_0\tau \quad (2.13)$$

2.3 Risonatore reale

In un risonatore reale per entrare nel caso $Q \gg 1$ occorre porre particolare attenzione ai termini dissipativi presenti sia negli elementi costitutivi del risonatore stesso sia nell'apparato che lo circonda.

In generale le cause di dissipazione nei mezzi materiali possono essere suddivisi in tre gruppi: dielettriche, magnetiche e resistive. Prendendo in considerazione il primo gruppo, nel caso più generale di campi elettromagnetici variabili nel tempo, si trova che il parametro principale è la componente immaginaria della costante dielettrica; infatti, un modo per descrivere le dissipazioni dielettriche è quello di considerare la costante dielettrica come un numero complesso

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' = |\epsilon|e^{-i\delta_{el}} \quad (2.14)$$

dove ϵ' è costante dielettrica assoluta, ϵ'' è il fattore di perdita dielettrica e δ_{el} è l'angolo di perdita dielettrica. Nell'eq. 2.14 la costante dielettrica complessa viene espressa in due modi: come reale e immaginaria o come modulo e fase;

la notazione usata più frequentemente prevede di utilizzare ϵ' e $\tan \delta_{el}$ definito come

$$\tan \delta_{el} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (2.15)$$

dove $\tan \delta_{el}$ è detto coefficiente di dissipazione; in questo modo la parte reale della costante dielettrica è definita come

$$\epsilon' = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (2.16)$$

dove ϵ_r è la costante dielettrica relativa e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. È importante notare che nel caso di materiali a basse dissipazioni il coefficiente di dissipazione può essere approssimato all'angolo di perdita; la costante dielettrica complessa può quindi essere espressa come

$$\epsilon = \epsilon' - \imath \epsilon'' = \epsilon'(1 - \imath \delta_{el}) \quad (2.17)$$

valida nel caso in cui $\delta_{el} \ll 1$.

In questo quadro se si considera una capacità si trova che le dissipazioni hanno un comportamento resistivo e possono, quindi, essere modellate come una resistenza in serie o in parallelo alla capacità ideale; calcolando l'impedenza, esprimendo la capacità come $C = C_0(1 - \imath \delta_{el})$, si trova infatti

$$Z = \frac{1}{\imath \omega C} = \frac{1}{\imath \omega C_0(1 - \imath \delta_{el})} = \frac{1 + \imath \delta_{el}}{\imath \omega C_0(1 + \delta_{el}^2)} \cong \frac{1}{\imath \omega C_0} + \frac{\delta_{el}}{\omega C_0} \quad (2.18)$$

in cui l'ultimo passaggio è giustificato solo nel caso $\delta_{el} \ll 1$; come anticipato precedentemente il secondo termine nell'impedenza trovata è puramente reale, attribuibile quindi ad una resistenza che in questo caso si considera in serie alla capacità e di valore $R_s = \delta_{el}/\omega C_0$.

In modo del tutto analogo le stesse considerazioni possono essere portate avanti discutendo le dissipazioni magnetiche e arrivando di nuovo a concludere che possono essere modellate come una resistenza in serie o in parallelo il cui valore dipende dall'angolo di perdita magnetico e dalla frequenza.

Come modello per il risonatore reale si attribuisco le dissipazioni a due resistenze dipendenti dalla frequenza, una in serie con la bobina, che verrà indicata con $R_s(\omega)$, e una in parallelo alla capacità $R_p(\omega)$, più un'ordinaria dissipazione ohmica considerata in parallelo al risonatore. Il fattore di qualità è quindi dato da

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_S(\omega)}{L\omega_0} + \frac{L\omega_0}{R_P(\omega)} + \frac{L\omega_0}{R_\Omega} \quad (2.19)$$

dove ω_0 è la pulsazione di risonanza; è stato dimostrato che le dissipazioni magnetiche possono essere espresse come $R_s(\omega) = L\delta_L\omega$ allo stesso modo le dissipazioni dielettriche della capacità principale danno un contributo $1/R_{P(\omega)} = C_n\delta_n\omega$; Bisogna inoltre considerare le dissipazioni dielettriche presenti nella capacità parassita introdotte dall'isolante del filo superconduttore della bobina, quindi: $1/R_{P(\omega)} = (C_n\delta_n + C_f\delta_f)$ dove gli indici n ed f si riferiscono rispettivamente alla capacità nominale e alla capacità parassita. L'espressione per il fattore di merito diventa quindi

$$\frac{1}{Q} = \delta_L + L\omega_0^2(C_n\delta_n + C_f\delta_f) + \frac{L\omega_0}{R_\Omega} \quad (2.20)$$

esprimendo questa equazione in termini della capacità totale definita come $C_{tot} = C_n + C_f$ e assumendo che nel valutare le dissipazioni dielettriche nella capacità principale $C_{tot} \cong C_n$ si trova

$$\frac{1}{Q} = \delta_L + \delta_n + \frac{C_f \delta_f}{C_{tot}} + \frac{L\omega_o}{R_\Omega} \quad (2.21)$$

Capitolo 3

Apparato sperimentale

Nel capitolo precedente è stato discusso il comportamento generale di un oscillatore, per arrivare a considerare in modo generale quali possono essere i problemi nel momento in cui si considera un oggetto reale; in questo capitolo verranno esposti quali sono gli accorgimenti da applicare e le soluzioni pratiche adottate nel realizzare l'apparato sperimentale nella sua totalità.

3.1 Risonatore

Per ottenere un risonatore ad alto fattore di merito è, dunque, necessario ridurre il più possibile tutte le dissipazioni che possono essere presenti, questo si traduce nell'adottare soluzioni specifiche per ogni termine dissipativo, scegliere i materiali adatti sia per il risonatore stesso sia per l'apparato che lo circonda e cercare la configurazione ottimale di tutto il sistema nel suo complesso.

Come primo elemento si prendano in considerazione i condensatori che andranno a formare la capacità principale del risonatore; il parametro fondamentale è facilmente individuato nell'angolo di perdita del dielettrico, si è quindi scelto di utilizzare condensatori commerciali al teflon, realizzati avvolgendo dei fogli sovrapposti di alluminio e teflon.

La bobina a basse dissipazioni è stata realizzata utilizzando un filo di Nb-Ti rivestito con formvar avvolto su un supporto cilindrico in PVC suddiviso in settori; il formvar viene utilizzato, nonostante dissipazioni dielettriche maggiori rispetto al teflon, date le migliori nonchè necessarie caratteristiche meccaniche, mentre il PVC è un materiale amagnetico che non introduce fenomeni dissipativi collaterali. La dissipazioni principali nella bobina sono dovute alla capacità parassita generata dal contatto tra gli strati sovrapposti degli avvolgimenti; un'induttanza di lunghezza l avvolta in N_s settori settori identici può essere approssimata come una serie di N_s induttanze di lunghezza l/N_s , ognuna in parallelo con la sua capacità parassita. La capacità parassita è proporzionale alla lunghezza, quindi se C_f è la capacità parassita di un'equivalente induttanza a settore unico di lunghezza l , ogni settore contribuisce con una capacità parassita C_f/N_s in serie con la successiva, si può quindi stimare la capacità parassita totale come C_f/N_s^2 .

Per evitare dissipazioni magnetiche le soluzioni da adottare consistono principalmente nello schermare adeguatamente l'apparato; questo si traduce innanzitutto nel ridurre il più possibile l'influenza del campo magnetico ambientale, evitare di introdurre materiale metallico non necessario ma soprattutto nell'isolare la bobina superconduttrice. Viste queste considerazioni il risonatore viene alloggiato in una scatola superconduttrice realizzata in rame con uno strato di Pb7%Sn elettrodeposto e suddivisa in due scompartimenti in modo da separare la bobina dai condensatori in alluminio.

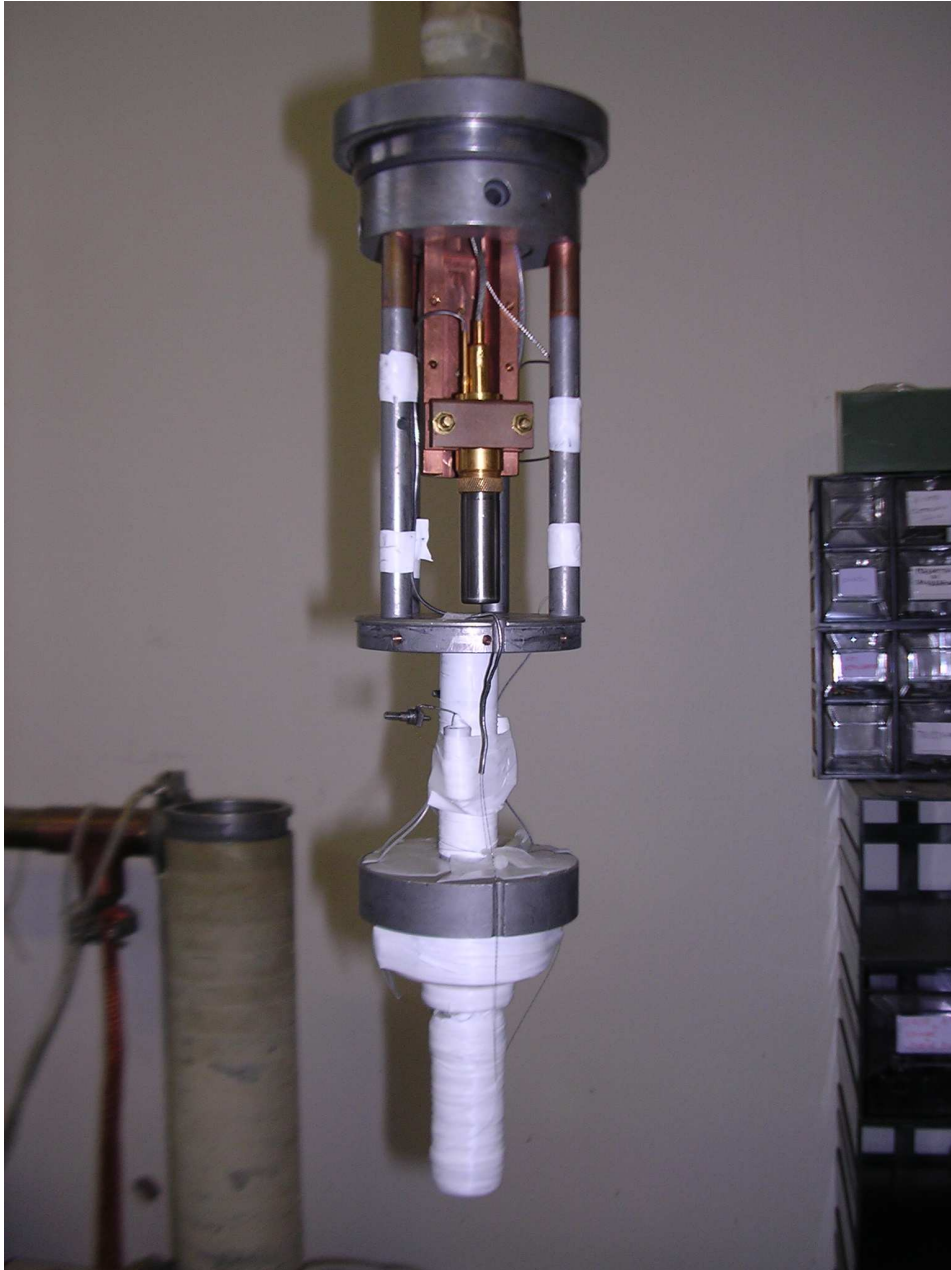


Figura 3.1: Foto dell'alloggiamento del risonatore e dello SQUID; sono visibili i due dischi di rame e le quattro colonne che formano la struttura portante dell'alloggiamento.

Le dissipazioni resistive presenti nell'apparato vengono attribuite ai connettori dei condensatori, i quali, realizzati in rame, non sono superconduttori. Altre dissipazioni di questo tipo possono essere introdotte da eventuali resistenze di contatto, bisogna quindi porre particolare attenzione nel collegare la bobina ai condensatori; per ottenere il contatto elettrico tra il fili di niobio e i connettori di rame dei condensatori è necessario utilizzare morsetti di niobio in quanto rame e niobio non possono essere saldati con stagno. Sperimentalmente, comunque, è stato osservato che generalmente le dissipazioni resistive in questo tipo di apparato possono essere trascurate[6].

La struttura portante dell'alloggiamento del risonatore (vedi fig. 3.1) è formato da due dischi di rame piombato fissati sulle estremità opposte di un cilindro dello stesso materiale; il disco inferiore ha la duplice funzionalità di separare lo scomparto della bobina da quello dei condensatori e di fornire, ovviamente, il supporto della bobina; il disco superiore viene fissato al resto del discendente tramite quattro colonne. Lo schermo viene ricavato da un tubo di ottone ricoperto da SnPb e fissato con semplici viti al disco superiore. All'interno di questa struttura la bobina viene fissata al supporto semplicemente tramite degli avvolgimenti con nastro di teflon commerciale, la tenuta è garantita dalla contrazione termica del teflon stesso. I condensatori vengono posizionati a ridosso dell'albero di supporto per i due dischi e fissati sempre con nastro di teflon.

3.1.1 Dimensionamento bobina superconduttrice

Le linee guida per il dimensionamento della bobina sono state dettate oltre che dalla necessità di limitare le dissipazioni, dalla frequenza di risonanza che si intendeva ottenere per il risonatore e dal ristretto spazio disponibile all'interno del refrigeratore a diluizione. Considerando di utilizzare una capacità totale di $32,9nF$ e volendo ottenere una frequenza di risonanza attorno ad $1kHz$ l'induttanza necessaria è stata stimata dell'ordine di $700mH$, secondo la relazione

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.1)$$

Come è già stato anticipato si è scelto di utilizzare un filo superconduttore di Nb-Ti rivestito in formvar con un diametro totale di $100\mu m$. Le dimensioni della bobina sono state calcolate usando il modello di solenoide spesso, secondo la relazione [7]

$$L = \frac{(N(R_{ext} + R_{int}))^2}{127(13R_{ext} + 9l - 7R_{int})} \quad [\mu H] \quad (3.2)$$

dove R_{ext} e R_{int} sono rispettivamente raggio esterno ed interno, N è in numero di avvolgimenti, l è la lunghezza del solenoide. Inoltre deve essere tenuto in considerazione l'effetto dello schermo superconduttore sul campo magnetico prodotto dalla bobina, che tende a ridurre l'effettiva induttanza, questo effetto viene stimato tramite la relazione

$$L_{eff} = L_0 \left[1 - \left(\frac{r_b^2}{r_s^2} \right) \right] \quad (3.3)$$

dove L_0 è il valore teorico dell'induttanza nel vuoto, r_b è il raggio esterno della bobina e r_s è il raggio interno dello schermo superconduttore. Questa relazione è valida nell'approssimazione di solenoide lungo, viene utilizzata in quanto fornisce comunque una stima indicativa mantenendo una forma molto semplice.

Valutando l'andamento dell'induttanza effettiva in funzione del raggio esterno della bobina (eq. 3.3) si trova che il valore dell'induttanza risultante presenta un massimo, che dipende dal raggio dello schermo superconduttore. La posizione di questo massimo fornisce in indicazione sulla dimensione più conveniente da adottare per il raggio esterno della bobina

Le dimensioni definitive scelte, in fase di progettazione, sono spire avvolte su un diametro da $\phi 17mm$ fino ad un diametro esterno da $\phi 22mm$ distribuite uniformemente su una lunghezza effettiva di $60mm$, per un totale di 12000 spire, corrispondenti a 500 per strato; l' L_0 così stimato risulta essere di circa $690mH$ che considerando l'effetto dello schermo diventa circa $630mH$. Usando l'eq. 3.1 la frequenza di risonanza effettiva attesa risulta essere di circa $1105Hz$.

Le spire sono state suddivise in 10 settori uguali per ridurre la capacità parassita, introdotta dall'isolante del filo superconduttore; In fig. 3.2 si può vedere il progetto del supporto della bobina, i settori per l'avvolgimento del filo sono in totale dieci di uguale larghezza, più un undicesimo è stato utilizzato per posizionare il pick-up dello SQUID e una spira per eccitare l'oscillatore.

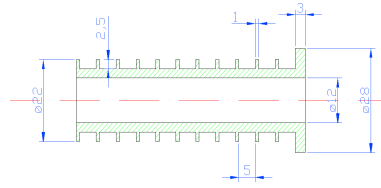


Figura 3.2: Progetto del supporto in PVC per la bobina superconduttrice.

3.1.2 Preparazione

La bobinatrice utilizzata è una macchina a 2 assi: un fuso rotante sul quale viene fissata la bobina ed un guidafile, il quale muovendosi alternativamente verso destra e verso sinistra dispone sulla bobina il filo proveniente da una rocca tenendolo costantemente in leggera tensione. Dispone, inoltre di un sistema elettronico che permette di impostare il passo di avanzamento del guidafile e la velocità di avvolgimento, visualizzando il numero totale di avvolgimenti effettuati.

Durante l'avvolgimento del filo di niobio non è stato possibile ottenere strati uniformi con numero di spire costante, si è cercato quindi di tenere costante il numero di avvolgimenti totali per settore, che risultano comunque molto compatti.

Alla luce del diverso numero di spire totali si è reso necessario ricalcolare il valore dell'induttanza attesa della bobina; il numero totale degli avvolgimenti è 10719, usando l'eq. 3.2 e l'eq. 3.3 si trova $L_{eff} \cong 503mH$ che corrisponde usando l'eq. 3.1 ad una frequenza di risonanza effettiva attesa di circa $1240Hz$.

3.2 Amplificatore SQUID ed eccitatore

I dispositivi superconduttori ad interferenza quantica (SQUID) sono i più sensibili rilevatori di flusso magnetico disponibili. La loro versatilità li ha resi uno degli strumenti superconduttori più diffusi. Sono, infatti, capaci di misurare qualsiasi grandezza fisica che sia convertibile in flusso, come per esempio il campo magnetico, il gradiente di campo magnetico, la corrente e la tensione. Tutto questo si traduce in un'ampia varietà di possibili applicazioni dalla misura dei piccoli campi magnetici prodotti dal cervello umano alla rilevazione di onde gravitazionali.

Gli SQUID sono basati su tre effetti quanto-meccanici: la superconduttività, la quantizzazione del flusso in un anello superconduttore chiuso e le giunzioni Josephson. Ne esistono di due tipi; il primo, i dc SQUID, è formato da due giunzioni Josephson collegate in parallelo su una spira superconduttrice e sono chiamati così perché operano con una corrente di polarizzazione costante, detta di bias. Il secondo tipo comprende una sola giunzione inserita in una spira superconduttrice ed operano con un flusso a radiofrequenza applicato esternamente, per questo vengono chiamati rf SQUID.

Gli SQUID sono, essenzialmente, dei trasduttori da flusso a tensione fornendo una tensione in uscita periodica in funzione del flusso applicato.

Inizialmente gli rf SQUID erano largamente più diffusi, in quanto comprendendo una sola giunzione erano più semplici da produrre. Fu, però, dimostrato che gli SQUID dc presentano una migliore sensibilità, questo, unito allo sviluppo dei dc SQUID su film sottile e di strumento basati su di essi, ha fatto sì che gli rf SQUID perdessero il loro primato.

3.2.1 Quantizzazione del flusso e giunzioni Josephson

La quantizzazione del flusso è un raro effetto macroscopico di quantizzazione; si può dimostrare (vedi appendice A) che il campo magnetico che attraversa un anello di un materiale che subisce la transizione a superconduttore rimane intrappolato; la quantizzazione del flusso emerge dalla necessità di garantire che la funzione d'onda che descrive lo stato quantico delle coppie di Cooper sia univoca in tutto l'anello. Si trova che il flusso intrappolato può assumere solamente valori discreti

$$\phi = n\phi_0 \quad (3.4)$$

dove ϕ rappresenta il flusso del campo magnetico intrappolato, n è un numero intero e $\phi_0 = \frac{\pi\hbar}{q_e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$ è il valore di un quanto di flusso.

La giunzione Josephson consiste in due superconduttori separati da un sottile strato di materiale isolante; se questo strato è sufficientemente sottile le coppie di Cooper sono in grado di attraversare la barriera dell'isolante per effetto tunnel mantenendo il loro stato legato. La corrente J applicata determina la differenza $\delta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ tra le fasi delle due funzioni d'onda dei due superconduttori secondo la relazione (vedi appendice B)

$$J = J_0 \sin \delta \quad (3.5)$$

dove J_0 è la corrente critica, cioè la massima corrente che la giunzione può sostenere. Quando la corrente applicata viene aumentata appare una tensione

attraverso la giunzione quando $J > J_0$; in questa situazione la differenza di fase evolve nel tempo secondo la relazione

$$\dot{\delta} = \frac{2q_e V}{\hbar} = \frac{2\pi V}{\phi_0} \quad (3.6)$$

dove V è la tensione attraverso la giunzione.

Un'importante caratteristica che deve essere tenuta in considerazione trattando le giunzioni Josephson, è l'isteresi presente nella curva corrente-tensione, quando la corrente viene aumentata da zero, la tensione cambia improvvisamente ad un valore non nullo quando J si avvicina a J_0 ; tornando, però, a zero solo quando J assume un valore molto inferiore a J_0 .

3.2.2 dc SQUID

Uno SQUID dc può essere rappresentato schematicamente da un anello superconduttore con due terminali e due giunzioni Josephson. Per eliminare l'isteresi le giunzioni vengono bypassate con una resistenza esterna detta di shunt. Questa configurazione viene rappresentata in fig. 3.3 dove alla giunzione è collegata in parallelo la resistenza di shunt e la sua capacità parassita.

L'equazione del moto sarà, quindi

$$C\dot{V} + J_c \sin \delta + \frac{V}{R} = J \quad (3.7)$$

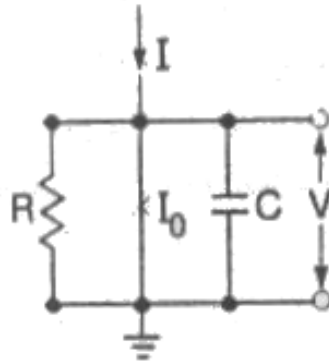


Figura 3.3: *Schema RSJ - Resistively Shunted Josephson junction.*

potendo esprimere la tensione come $V = \hbar\dot{\delta}/2e$, si ottiene [8]

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\delta} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\delta} = J - J_c \sin \delta \quad (3.8)$$

Questa modellizzazione delle giunzioni viene chiamata RSJ (Resistively Shunted Junction); con questo modello gli SQUID dc possono essere schematizzati come in fig 3.4

Quando si polarizza lo SQUID con una corrente costante I_b , maggiore di $2J_c$, la tensione sui terminali oscilla al crescere del flusso applicato con periodo ϕ_0 , agendo effettivamente come un trasduttore da flusso a tensione. Generalmente viene fatto operare nella parte a maggiore pendenza della curva $V - \phi$ dove il coefficiente di trasferimento, $V_\phi = |(\partial V/\partial \phi)_I|$, è massimo; lo SQUID produce, quindi, un segnale in uscita massimo $\partial V = V_\phi \partial \phi$ in risposta ad un piccolo segnale di flusso $\delta \phi$.

Le differenze di fase attraverso le due giunzioni, $\delta_1(t)$ e $\delta_2(t)$, seguono le

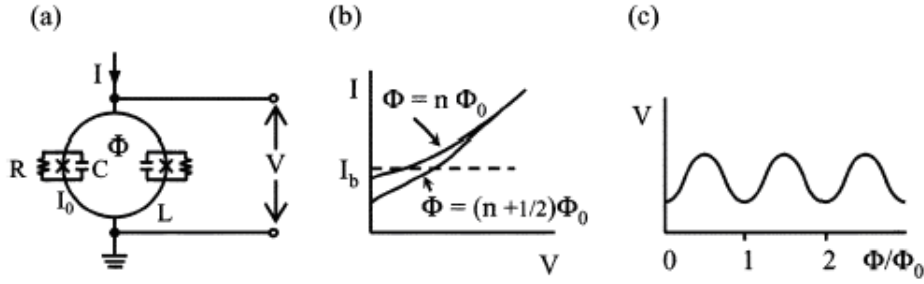


Figura 3.4: a) schema dc SQUID; (b) curva caratteristica $I - V$; (c) V in funzione di ϕ/ϕ_0 a corrente di polarizzazione costante.

seguenti equazioni[8]

$$V = \frac{\hbar}{4e}(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) \quad (3.9)$$

$$J = \frac{\phi_0}{2\pi L}(\delta_1 - \delta_2 - \frac{2\pi\phi_{ext}}{\phi_0}) \quad (3.10)$$

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\delta}_1 + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\delta}_1 = \frac{I_b}{2} - J - J_0 \sin \delta_1 \quad (3.11)$$

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\delta}_2 + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\delta}_2 = \frac{I_b}{2} - J - J_0 \sin \delta_2 \quad (3.12)$$

L'eq. 3.9 mette in relazione la tensione alla velocità di variazione delle fasi; l'eq. 3.10 esprime la quantizzazione del flusso, mentre le eq. 3.11 e 3.12 sono le equazioni del moto delle giunzioni, accoppiate tramite J . Questo sistema di equazioni viene risolto numericamente, mirando ad eliminare il più possibile l'isteresi delle giunzioni, massimizzare il coefficiente di trasferimento e a minimizzare l'energia del rumore.

3.2.3 Configurazione

Nella maggior parte delle applicazioni gli SQUID sono usati in un circuito di feedback negativo, il segnale in uscita viene rimandato allo squid come corrente oppure, come più frequentemente succede, come flusso (in questo caso viene chiamato Flux-locked loop, FLL). Il circuito di feedback linearizza la risposta e la rende più versatile permettendo di rilevare frazioni di un quanto di flusso così come numerosi quanti. Generalmente viene applicato un flusso di modulazione con un'ampiezza picco-picco di $\phi_0/2$ e frequenza f_m solitamente tra i 100 e i 500 Hz. Se questo flusso è esattamente $n\phi_0$ la tensione risultante sarà una versione rettificata del segnale in ingresso, e avrà quindi frequenza $2f_m$. Questo segnale verrà rilevato da un amplificatore lock-in centrato alla frequenza di riferimento f_m e l'uscita sarà, quindi, nulla. D'altra parte se il flusso di modulazione è $(n + 1/4)\phi_0$ il segnale all'uscita del lock-in sarà massimo (fig. 3.5).

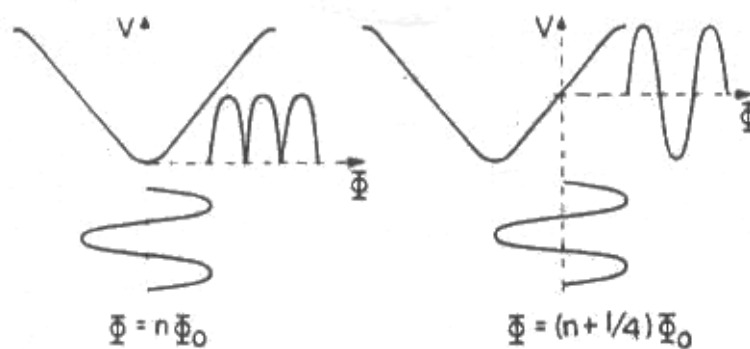


Figura 3.5: Schema del flusso di modulazione che mostra la tensione ai capi dello SQUID per $\phi = n\phi_0$ e per $\phi = (n + 1/4)\phi_0$.

In fig 3.6 è possibile vedere lo schema di un tipico circuito FLL, il segnale

dello SQUID è accoppiato tramite un circuito risonante o un trasformatore ad un primo amplificatore a temperatura ambiente, successivamente viene rilevato da un amplificatore lock-in. Dopo essere stato integrato il segnale viene mandato come corrente, attraverso un resistore, ad una spirale, la quale genererà il flusso del feedback negativo mantenendo il flusso nello SQUID costante in un punto di lavoro ottimale. È presente, inoltre, un oscillatore che produrrà il flusso di modulazione.

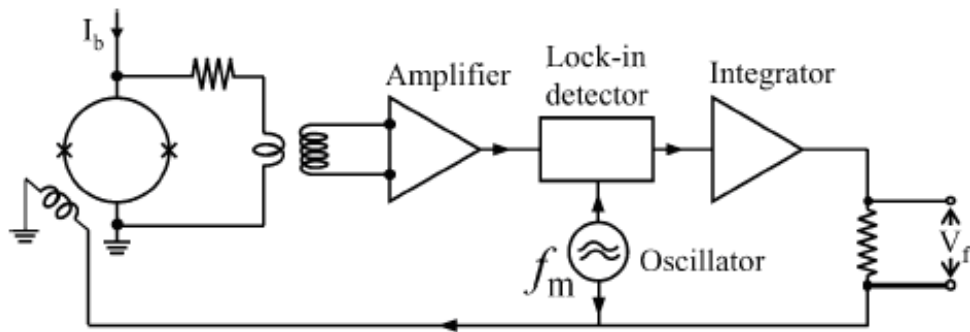


Figura 3.6: *Circuito di modulazione e feedback per uno SQUID dc.*

Nelle misure è stato utilizzato un dc SQUID commerciale Quantum Design realizzato su un chip sul quale sono integrate anche la bobina di ingresso e la bobina di feedback. Lo SQUID viene racchiuso durante le misure all'interno di uno schermo superconduttore cilindrico in niobio. Il segnale viene portato all'induttanza di ingresso tramite un pick-up posizionato sul fianco della bobina e realizzato con due spire di filo di niobio, del diametro di circa 2mm leggermente sovrapposte.

L'eccitazione del risonatore viene ottenuta tramite una singola spira, coassiale alla bobina, in modo da ottenere l'ottimizzazione del campo prodotto e posizionata sull'ultimo settore libero del supporto della bobina stessa. La linea viene portata alla testa del discendente, dove è presente un connettore

BNC, tramite una resistenza da $10k\Omega$ per filtrare il rumore proveniente dalle parti dell'apparato a temperatura ambiente.

3.3 Amplificatore Lock-in

L'amplificatore lock-in è un dispositivo elettronico molto versatile e diffuso nella pratica sperimentale. I suoi componenti fondamentali sono un mixer, che moltiplica il segnale da analizzare ad un segnale di riferimento, e un filtro passa-basso che integra il segnale in uscita dal mixer su un periodo pari alla sua costante di tempo; in fig. 3.7 si può vedere lo schema a blocchi di un amplificatore lock-in.

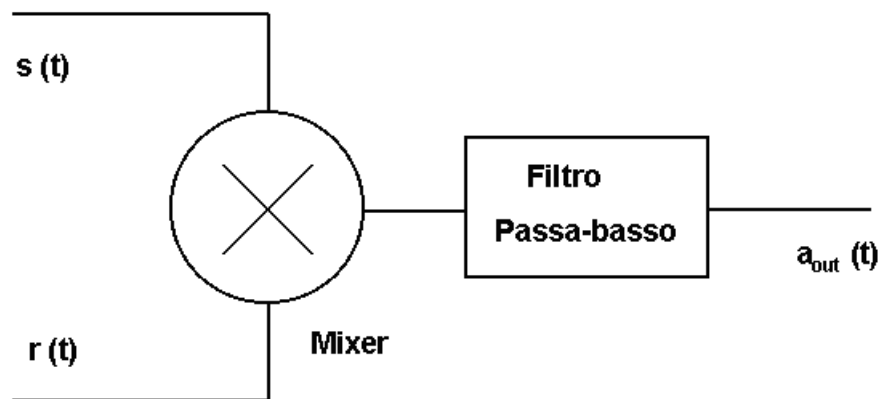


Figura 3.7: Schema di un amplificatore lock-in.

Selezionata la frequenza del segnale di riferimento, il lock-in produce in uscita un valore di tensione costante direttamente proporzionale alla componente in fase del segnale da analizzare a quella particolare frequenza.

Si consideri S_{in} come un segnale periodico formato dalla sovrapposizione di onde sinusoidali e S_{ref} come un'onda sinusoidale di riferimento

$$S_{in} = \sum_{i=0}^N S_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (3.13)$$

$$S_{ref} = A_{ref} \sin(\omega_{ref} t + \phi_{ref}) \quad (3.14)$$

il segnale in uscita dal mixer sarà [9]

$$S_{mix} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N S_i A_{ref} [\cos((\omega_{ref} - \omega_i)t + \Delta\phi_i) + \cos((\omega_{ref} + \omega_i)t + \phi_i + \phi_{ref})] \quad (3.15)$$

dove $\Delta\phi_i$ indica la differenza di fase tra la fase del segnale di riferimento ϕ_{ref} e la generica fase ϕ_i .

Il segnale, quindi, si presenta all'ingresso del filtro passa-basso, il quale taglia le componenti con frequenza maggiore a $1/\tau$, dove τ rappresenta la costante di tempo del filtro stesso. Se la frequenza del segnale di riferimento è molto più alta dell'inverso della costante di tempo allora tutti i termini che nell'eq. 3.15 contengono le somme $\omega_{ref} + \omega_i$ verranno in pratica eliminati. Per quanto riguarda i termini rimanenti usciranno dal filtro solo quelli *quasi risonanti*, cioè i termini in cui la differenza $|\omega_i - \omega_{ref}|$ risulta minore di $1/\tau$.

Il lock-in risulta, quindi, particolarmente adatto ad analizzare segnali di cui si conosce la frequenza ed estrarli dal rumore, infatti, la sua azione consiste

nel traslare la pulsazione di interesse nell'origine dello spazio delle frequenze; in questo modo infatti è possibile utilizzare un filtro passa-basso, il cui fattore di merito è programmabile tramite la scelta della costante di tempo, invece di utilizzare filtri passa-banda con i quali è difficile ottenere alti fattori di merito.

3.4 Discendente e schermi

Il discendente utilizzato si può suddividere in tre parti: la testa, alla quale sono fissati i passanti da vuoto che permettono il passaggio dei vari fili e su cui è presente un passaggio che ha la duplice funzionalità di linea di pompaggio e valvola di sicurezza in fase di estrazione; la seconda parte è costituita da un tubo di acciaio attraverso il quale passano i fili di collegamento dei vari strumenti; viene utilizzato acciaio, in quanto, unisce la resistenza meccanica e la bassa conducibilità termica necessarie a poter collegare le parti calde con le parti fredde del sistema e a sostenere la terza e ultima parte, cioè lo schermo superconduttore. Quest'ultimo è formato da una struttura cilindrica che viene fissata alla base del tubo di acciaio e al cui interno viene collocato tutto il sistema.

Lo schermo viene fissato ad una flangia che costituisce la parte finale del tubo di acciaio, sia la flangia che lo schermo sono entrambi in rame ricoperto da SnPb elettrodeposto. L'assemblaggio prevede l'utilizzo di un O-ring di Indio che assicura la tenuta da vuoto grazie alla sua elevata malleabilità anche a temperature basse; schermo e flangia vengono chiusi l'uno sull'altro tramite una coppia di collari di serraggio in acciaio.

Alla flangia, inoltre, sono agganciati, tramite viti in ottone, un anello al quale, a sua volta, sono fissate le quattro colonne menzionate precedentemente, utilizzate per montare l'alloggiamento dell'oscillatore, e un pezzo di rame che costituisce il supporto dello SQUID (vedi fig.3.1).

Per favorire la termalizzazione del sistema è importante che il contatto termico tra la flangia e il pezzo di rame sia ottimale, in quanto, è responsabile della termalizzazione sia dello stesso SQUID sia del termometro, inoltre viene immessa una pressione di una decina di mbar di He gas sufficienti a garantire il contatto termico di tutte le parti all'interno della scatola. Sullo stesso blocco di rame che sostiene e termalizza il dc SQUID è fissato un termometro al germanio che permette di monitorizzare la temperatura all'interno della scatola, la valutazione della temperatura viene effettuata misurando la resistenza del terminale al germanio tramite una misura a quattro fili e confrontandone, poi, il valore con la curva di calibrazione fornita dal costruttore. L'incertezza sul valore della temperatura è dell'ordine del 2%.

Nella preparazione del discendente l'ultima fase prevede di svuotare la scatola fino ad una pressione di qualche *mbar*, riempirla di elio gas e successivamente svuotata nuovamente; questa procedura viene reiterata 2 o 3 volte in modo da avere poche impurità e quindi poca condensazione di gas a temperature criogeniche all'interno della scatola. A questo punto viene lasciata l'atmosfera di elio di cui si è parlato precedentemente. Come effetto secondario questa procedura permette di controllare la tenuta da vuoto.

3.5 Criostato

Il criostato utilizzato per le misure ha una capacità massima di 60 litri, presenta uno schermo in μ – *metal* che fornisce un'attenuazione dei campi magnetici ambientali di un fattore dell'ordine 100, in particolare nella zona bassa del dewar dove è situato l'apparato sperimentale. In questo modo viene limitato il campo magnetico intrappolato nello schermo principale al momento della transizione superconduttrice.

Capitolo 4

Metodo di misura

La determinazione del fattore di qualità e della frequenza di risonanza viene effettuata eccitando l'oscillatore e studiando il decadimento libero. L'eccitazione si ottiene collegando la linea di eccitazione ad un generatore di segnali regolato ad 1 Volt alla frequenza di risonanza attesa.

Un analizzatore di spettri permette di identificare il picco gaussiano dell'oscillatore; modificando la frequenza del segnale del generatore il picco sull'analizzatore di spettri oltre a centrarsi sulla nuova frequenza aumenta o diminuisce di intensità rispettivamente se la frequenza del generatore di segnali è più vicina o più lontana dall'effettiva frequenza di risonanza dell'oscillatore. In questo modo si effettua una prima misura della frequenza di risonanza.

Successivamente il segnale raccolto dallo SQUID viene mandato, tramite un pre-amplificatore a temperatura ambiente, all'amplificatore lock-in, si può dimostrare [10] che la velocità di deriva della fase misurata dall'amplificatore lock-in è proporzionale alla differenza fra la frequenza di oscillazione e la frequenza di reference dell'amplificatore lock-in

$$\dot{\varphi} \left(\frac{\text{deg}}{\text{s}} \right) = \frac{\nu_0 - \nu_{ref}}{360} \quad (4.1)$$

la frequenza di risonanza può quindi essere individuata con una maggiore precisione variando la frequenza fino ad ottenere una fase sufficientemente costante; in questo modo è possibile centrare la frequenza con la precisione di $\pm 0,5mHz$, cioè con la precisione migliore del generatore di segnali.

Per ottenere il fattore di merito si grafica in funzione del tempo i valori campionati del decadimento dell'ampiezza di oscillazione e se ne determina la costante di tempo tramite un fit esponenziale (vedi eq. 2.12), si risale quindi al fattore di merito tramite la relazione $Q = \pi\nu_0\tau$ (vedi eq. 2.13). In fig. 4.1 si può vedere il risultato di una acquisizione.

Come si può notare dal grafico in figura 4.1 lo SQUID viene spento per un certo intervallo di tempo in modo tale da controllare che non influenzi l'oscillazione, eventualità che viene confermata se la costante di tempo del decadimento rimane invariata prima e dopo avere spento lo SQUID; per lo stesso motivo viene variato il range dinamico in tutti e tre i valori possibili. Una volta verificato che lo SQUID non influenza in modo apprezzabile l'oscillazione libera del risonatore viene acquisito un decadimento continuo.

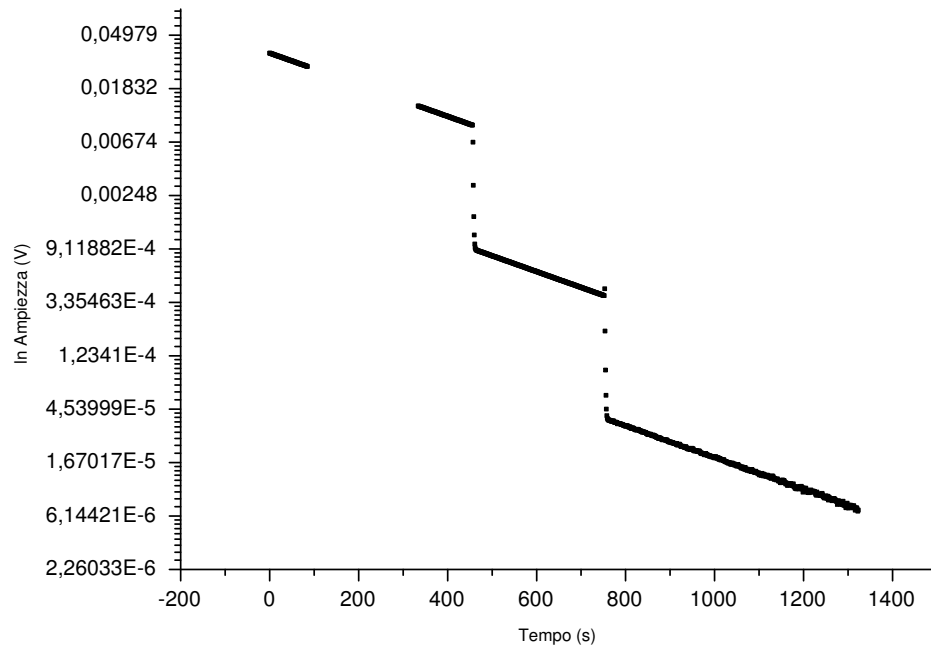


Figura 4.1: *Esempio di decadimento dell'ampiezza di oscillazione; si può notare sia la zona corrispondente allo SQUID spento sia il cambio del range dinamico.*

Capitolo 5

Caratterizzazione del risonatore alla temperatura dell'elio

liquido

Sono stati effettuati tre tipi di misura, nel primo si misura il fattore di qualità a diverse frequenze di risonanza collegando in parallelo alla bobina 3 capacità differenti; nella seconda è stata collegata in parallelo al risonatore una treccia di filo di niobio di qualche metro per poter valutare le dissipazioni introdotte dal dielettrico costituito dall'isolante del filo e valutarne l'angolo di perdita; mentre nella terza si è aggiunto un secondario per valutare di quanto viene ridotto il Q e per stimare il coefficiente di accoppiamento induttivo.

5.1 Misure fattore di qualità

Nella prima misura è stata utilizzata una capacità totale di $C = (32,83 \pm 0,007)nF$ realizzata ponendo in parallelo sette condensatori dalla capacità nominale di $4,7nF$ ognuno; la frequenza di risonanza risulta essere $\nu_0 = (1232,607 \pm 0,0005)Hz$ dalla quale si può ricavare il valore dell'induttanza della bobina superconduttrice: $L = (506,75 \pm 0,1)mH$.

Nella seconda misura la capacità totale utilizzata è $C = (4,79 \pm 0,0005)nF$ realizzata con un singolo condensatore commerciale da $4,7nF$ nominali; la frequenza di risonanza ottenuta è $\nu_0 = (3228,236 \pm 0,005)Hz$.

Nella terza la capacità totale è $C = (509,7 \pm 0,5)pF$ che è stata ottenuta ponendo in serie due condensatori dalla capacità nominale di $1nF$, andando quindi a risonare a $\nu_0 = (9838,502 \pm 0,0005)Hz$.

In tutte le misure effettuate in questi tre run il decadimento dell'ampiezza di oscillazione risulta esponenziale, come del resto era atteso, con degli errori sul fit tali da non influire sull'incertezza del valore del fattore di qualità; inoltre è stata verificata la non influenza dello SQUID sia spegnendolo per un certo intervallo di tempo sia cambiando il range dinamico di acquisizione senza ottenere variazioni apprezzabili della costante di tempo; in figura 5.1 si può vedere un tipico esempio di decadimento rilevato.

Nella tabella 5.1 è riportato un riepilogo dei risultati ottenuti.

Questi dati permettono di concludere che il risonatore rispetta i requisiti preposti in fase di progettazione, ottenendo un fattore di qualità ad $1kHz$ tra i più alti mai realizzati.

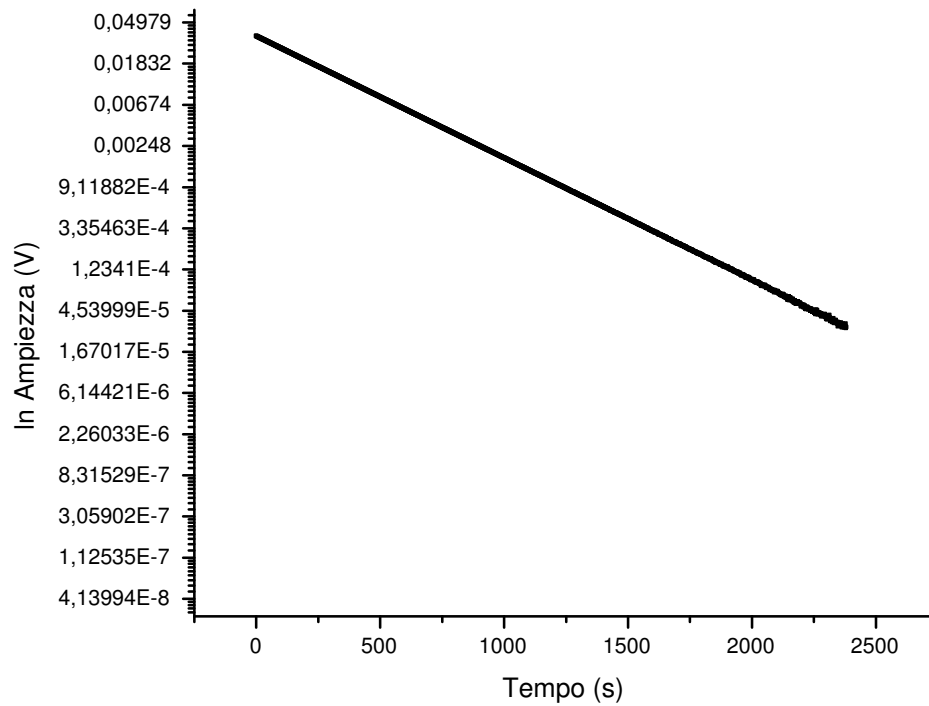


Figura 5.1: Esempio di decadimento dell'ampiezza di oscillazione.

| Capacità (nF) | Frequenza di risonanza (Hz) ($\pm 0,0005$) | Fattore di qualità $\pm 1\%$ |
|---------------------|---|---------------------------------|
| $32,83 \pm 0,007$ | 1232,607 | 1308000 |
| $4,79 \pm 0,0005$ | 3228,236 | 1070300 |
| $0,5097 \pm 0,0005$ | 9838,502 | 406000 |

Tabella 5.1: Fattori di qualità ottenuti per diversi valori di capacità utilizzate.

I dati raccolti permettono di valutare se la capacità dei condensatori commerciali usati presentano uno scostamento eccessivo dal valore a temperatura ambiente quando vengono raffreddati alla temperatura dell'elio liquido; la

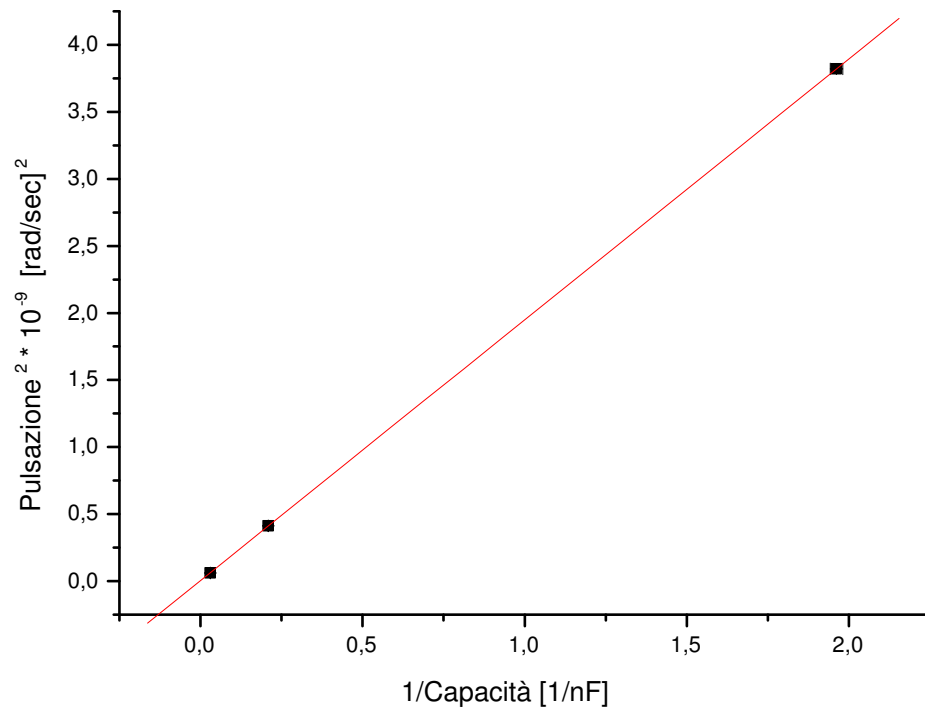


Figura 5.2: *Fit lineare del quadrato della pulsazione di risonanza in funzione dell'inverso della capacità.*

struttura interna di questi condensatori presenta fogli sottili di alluminio e teflon arrotolati, la contrazione termica del teflon a $4,2K$ permette di avanzare l'ipotesi che ci sia una variazione sufficiente nella struttura (per esempio la riduzione dello spessore del teflon, quindi del dielettrico) da variare in modo significativo la capacità. Per verificare se questa eventualità si verifica o meno, è stato graficato l'andamento del quadrato della pulsazione di risonanza in funzione dell'inverso della capacità in modo da poter valutare l'accordo con l'eq. 5.1 tramite un semplice fit lineare:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (5.1)$$

l'induttanza stimata con questo metodo risulta $L = (514 \pm 7)mH$ in ottimo accordo con l'andamento atteso. Si può quindi concludere che la capacità non varia in modo significativo a freddo oppure che la variazione risulta essere della stessa percentuale nei due tipi di condensatori utilizzati.

5.2 Misura capacità parassita di una treccia di filo di niobio e dell'angolo di perdita del formvar

L'apparato sperimentale per questa misura è in sostanza identico alla configurazione del primo run, la differenza consiste nell'aggiunta di una treccia di filo di niobio collegata in parallelo al risonatore. La treccia è stata preparata avvolgendo l'uno sull'altro due fili lunghi, circa $2m$, di Nb-Ti del diametro totale di $100\mu m$ di cui $75\mu m$ sono effettivamente di Nb-Ti e il restante è l'isolante, cioè formvar. La variazione della frequenza di risonanza e del fattore di qualità permette di valutare la capacità parassita introdotta dalla treccia e in particolare di stimare l'angolo di perdita del formvar.

Il fattore di qualità si può esprimere tramite la relazione

$$Q = \frac{R}{\omega L} \quad (5.2)$$

dove la resistenza in parallelo R rappresenta tutti i termini dissipativi del risonatore; l'introduzione della treccia può essere schematizzata tramite una capacità parassita C_f e una resistenza R_f aggiunte in parallelo al circuito precedente; il circuito equivalente è di nuovo un circuito RLC dove la capacità totale è data da $C_T = C + C_f$ e la resistenza totale da

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_f} \quad (5.3)$$

Il rapporto quadro tra le frequenze di risonanza del sistema prima e dopo l'introduzione della treccia fornisce direttamente un'espressione per valutare la capacità parassita introdotta

$$\left(\frac{\nu_0}{\nu_2}\right)^2 = \frac{C_T}{C} \quad (5.4)$$

da cui facilmente:

$$C_f = C \left(\frac{\nu_0}{\nu_2}\right)^2 - C \quad (5.5)$$

Il fattore di qualità del risonatore comprendente la treccia può essere espresso come

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{\omega_2 L}{R_T} = \omega_2 L \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_f}\right) \quad (5.6)$$

ora, assumendo come approssimazione che $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ e ricordando l'eq. 2.3, l'espressione precedente può essere riscritta come

$$\frac{1}{Q_2} = \frac{1}{Q_1} + \omega_2^2 L \delta_f C_f = \frac{1}{Q_1} + \frac{\delta_f C_f}{C_T} \quad (5.7)$$

da cui si ricava facilmente un'espressione per δ_f

$$\delta_f = \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} \right) \cdot \frac{C_T}{C_f} \quad (5.8)$$

Sperimentalmente è stata misurata una frequenza di risonanza $\nu_2 = (1229,029 \pm 0,0005)Hz$ ed un fattore di merito $Q_2 = 431600 \pm 1\%$; si ricava quindi la capacità parassita introdotta dalla treccia $C_f = (191,85 \pm 0,05)pF$ e la stima dell'angolo di perdita del formvar a $4,2K$, $\delta_f = (2,680 \pm 0,001) \cdot 10^{-4}$.

5.3 Stima coefficiente di accoppiamento induttivo

L'obiettivo di questa misura consiste nell'andare a misurare la variazione di frequenza determinata dall'introduzione di un secondario al sistema in modo da poter valutare il coefficiente di accoppiamento induttivo che è possibile realizzare; questo dato risulta importante in quanto nel rilevatore di onde gravitazionali AURIGA viene utilizzato un accoppiamento forte nel trasformatore di matching. L'induttanza aggiunta consiste in 20 spire equispaziate di filo di Nb-Ti dello stesso spessore della bobina principale avvolte direttamente sul rivestimento di teflon della bobina in modo da ottenere un forte accoppiamento; l'induttanza così realizzata viene stimata nell'approssimazione di solenoide lungo secondo la relazione [12]

$$L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} K \quad (5.9)$$

dove N è il numero totale di spire, S è l'area della sezione trasversale, l è la lunghezza del solenoide, e K è un coefficiente che tiene conto dell'effettivo rapporto l/d della bobina; l'induttanza così stimata risulta $L_s \cong 3\mu H$. I due capi del filo della bobina sono stati intrecciati e chiusi su se stessi con un morsetto di niobio posizionato nel vano dei condensatori.

La misura del fattore di qualità in questa configurazione è risultata essere meno attendibile rispetto alle precedenti, in quanto è stato possibile osservare forti variazioni sia della fase dell'oscillazione sia della costante di tempo del decadimento in ampiezza; questo può essere attribuito a due principali cause, la prima possibilità consiste in una termalizzazione non ancora completa e ottimale e quindi ad un drift in temperatura durante la rilevazione dei decadimenti; la seconda causa potrebbe derivare dall'impedenza dinamica dello SQUID che nella configurazione di accoppiamento forte ha un'influenza maggiore, producendo effetti di difficile interpretazione.

La frequenza di risonanza misurata è $\nu_0 = (14032,941 \pm 0,0005)Hz$ che deve essere confrontata con la risonanza del risonatore nella stessa configurazione tolto il secondario $\nu_1 = (9838,502 \pm 0,0005)Hz$, il coefficiente di accoppiamento viene valutato tramite la relazione

$$k^2 = 1 - \left(\frac{\nu_1}{\nu_0} \right)^2 \quad (5.10)$$

da cui si ricava $k = 0,713$.

Capitolo 6

Fattore di merito a temperature ultra-criogeniche

In questo capitolo si presentano altri risultati sulla dissipazione di risonatori LC ottenuti con esperimenti a cui non ho direttamente partecipato. In particolare si riassume la situazione sperimentale antecedente al mio tirocinio di laboratorio e gli sviluppi successivi.

6.1 Osservazione della dipendenza del Q dalla temperatura

Nel 2005 sono stati presentati [11] dei test su un risonatore LC sviluppato per soddisfare i requisiti necessari ad essere utilizzato nella catene di trasduzione del rivelatore AURIGA nel momento in cui verrà fatto operare

a $100mK$. Come già detto in precedenza per raggiungere una sensibilità ottimale, nel caso di modo elettrico sintonizzato, è necessario soddisfare due requisiti: il Q deve essere dell'ordine del milione e il suo rumore deve essere termico.

Il risonatore utilizzato era composto da un capacità di $23,5nF$, a temperatura ambiente, ottenuta tramite un parallelo di 5 condensatori commerciali al teflon da $4,7nF$ ognuno, e da una bobina di induttanza $L = 10,7mH$, realizzata avvolgendo un filo di diametro $100\mu m$ su un supporto cilindrico in PVC di lunghezza $69mm$, diametro esterno di $20mm$ e suddiviso in 10 settori, ognuno lungo $5mm$; il filo era avvolto sequenzialmente inserendo 3 strati per ogni settore; la frequenza di risonanza misurata è stata di $10025Hz$.

I dati rilevati hanno permesso di ottenere un primo importante risultato in quanto dimostrano che il rumore del risonatore è effettivamente termico in tutto il range di temperatura tra i $60mK$ e $4,2K$ e che quindi ogni elemento dissipatore del risonatore è essenzialmente all'equilibrio termico con il bagno anche sotto i $100mK$.

Misure del fattore di merito in funzione della temperatura del risonatore LC mostrano, invece, un peggioramento del fattore di qualità al diminuire della temperatura, in particolare sotto $1K$.

Successivamente, per capire la causa di questo termine aggiuntivo di dissipazione sono state eseguite misure del Q con setup diversi. Inizialmente è stato cambiato il campo magnetico ambientale in modo da far avvenire la transizione superconduttiva dello schermo della bobina, che si verifica a circa $7K$, e dell'alluminio che compone le armature dei condensatori, che avviene a circa $1K$, in presenza di un campo magnetico più intenso. Infatti le dissipazioni aggiuntive potrebbero essere attribuibili al movimento di flussoni intrappolati nei superconduttori, il cui numero dipende dal campo presente

al momento della transizione. Successivamente è stato utilizzato He_4 come gas di scambio per escludere un eventuale ruolo della dissipazione associata alla suscettività magnetica dell' He_3 che cresce in maniera inversamente proporzionale alla temperatura al di sotto di $1K$. Entrambe queste due prove non hanno eliminato la dissipazione aggiuntiva.

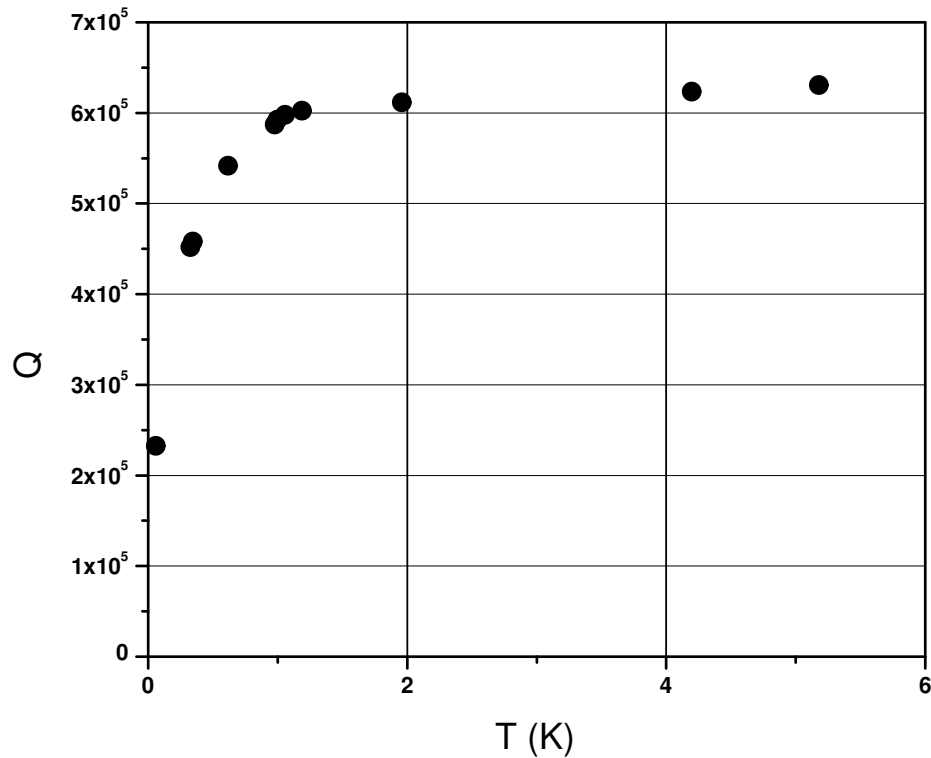


Figura 6.1: *Fattore di qualità in funzione della temperatura; a temperature ultra-criogeniche il Q diminuisce drasticamente.*

6.2 Analisi delle possibili cause di deterioramento del fattore di qualità

Dopo la realizzazione e caratterizzazione della bobina superconduttrice descritta nel capitolo 3, una prima verifica eseguita con la configurazione del risonatore utilizzata nella prima misura presentata nel paragrafo 5.1 ha mostrato nuovamente un aumento delle dissipazioni al diminuire della temperatura, nel range $4,2 - 0,060K$, con un andamento approssimativamente proporzionale a $1/T$.

Successivamente sono stati svolti ulteriori test in un discendente per immersioni in elio liquido, del tipo usato per la caratterizzazione della bobina, che garantisce una maggiore versatilità e un minore consumo di elio rispetto al refrigeratore a diluizione: in questo caso l'abbassamento della temperatura si ottiene pompando elio gas dal criostato (un circuito di feedback applicato ad una elettrovalvola in testa ad un pompa e controllato da un termometro al germanio stabilizza la temperatura).

Nel primo test è stata estesa in funzione della temperatura la prova descritta nel paragrafo 5.2 nella quale era stata aggiunta una treccia di filo di Nb-Ti in parallelo al risonatore, in modo tale che le dissipazione dielettriche dell'isolante del filo, cioè formvar, siano dominanti. Prevedibilmente il Q si riduce e passa da un valore di 1300000, senza treccia, a 460000; si è visto però che il fattore di merito dipende poco da T tra 1,2 e 4,2K quindi la dissipazione del formvar rimane costante in questo range di temperatura.

Nei test successivi sono state utilizzate capacità diverse: prima due condensatori da $1nF$ in serie, dello stesso tipo usato finora, poi un condensatore "air gap" con armature in alluminio nel quale la maggior parte della capacità,

di circa $0,5nF$, è ottenuta senza dielettrico. In entrambi i casi è stato trovato lo stesso andamento del fattore di qualità in temperatura tra $1,2$ e $4,2K$, a parte un termine costante nei condensatori al teflon, dovuto probabilmente a perdite resistive; quindi questo peggioramento non dipende dal dielettrico del condensatore.

Lo stesso condensatore “air gap” è stato testato nuovamente nel refrigeratore a diluizione per studiare più in dettaglio l’andamento del fattore di qualità nel range di temperature ultra-criogeniche (vedi fig. 6.2).

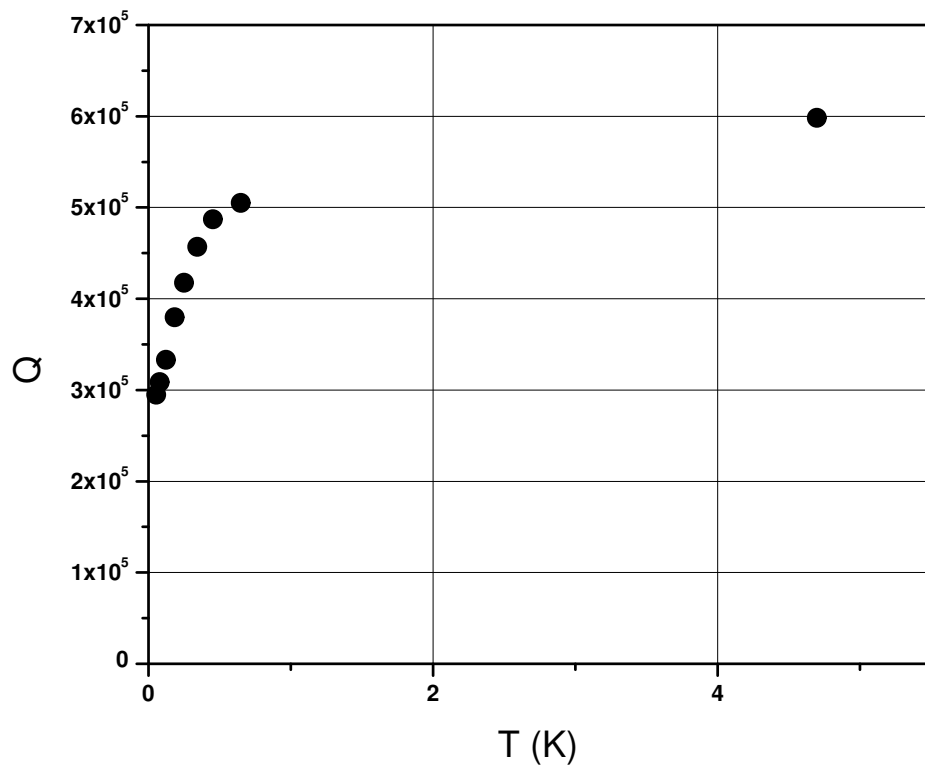


Figura 6.2: Fattore di qualità in funzione della temperatura; risonatore con capacità “air gap”.

Risultati diversi erano attesi nel successivo test nel quale è stato sostituito lo schermo superconduttore interno utilizzato per alloggiare la bobina. Invece dello schermo di rame rivestito di stagno-piombo elettrodeposto è stato utilizzato un schermo interamente in niobio ad alta purezza. In questo caso la capacità era costituita da due condensatori al teflon da $1nF$ in serie. I risultati ottenuti mostrano invece lo stesso peggioramento del fattore di qualità a temperature ultra-criogeniche e quindi l'andamento del Q non dipende da dissipazioni aggiunte dall'alloggiamento della bobina.

I test eseguiti finora se da un lato hanno permesso di escludere alcune sorgenti di dissipazione dall'altro non hanno individuato la causa dominante di dissipazione a temperature ultra-criogeniche. Si possono comunque ideare ulteriori test per raggiungere questo scopo. Una prima possibilità nasce supponendo che la dissipazione in eccesso sia dovuta all'alluminio dei condensatori, sia quelli commerciali al teflon che quelli ad "air gap". Negli esperimenti futuri si proverà ad utilizzare un condensatore commerciale con armature in stagno. Supponendo, invece, che la dissipazione in eccesso sia attribuibile alla lega niobio-titanio del filo della bobina si proverà ad utilizzare una bobina realizzata con filo di niobio puro.

L'ipotesi più attendibile, comunque, sembra attribuire le dissipazioni aggiuntive al comportamento paramagnetico del supporto della bobina (PVC) al di sotto di $1K$, verificabile realizzando un supporto in niobio.

Appendici

Appendice A

Quantizzazione del flusso

Si consideri un anello superconduttore inizialmente immerso in un campo magnetico il quale venga successivamente raffreddato al di sotto della temperatura critica, cioè fino allo stato superconduttore. Se a questo punto il campo esterno viene rimosso, le linee di campo che attraversano il centro del foro rimangono intrappolate, in quanto il flusso attraverso il foro non può diminuire perché

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \oint_{\text{anello}} E \cdot ds \quad (\text{A.1})$$

e l'integrale del campo lungo l'anello è necessariamente nullo in un superconduttore. Il flusso viene mantenuto costante dal comparire di supercorrenti che fluiscono sulla superficie dell'anello. Queste correnti sono in grado di mantenere il campo magnetico fuori dal corpo dell'anello (effetto Meissner) ed anche di produrre il campo che resta intrappolato permanentemente. Le supercorrenti coinvolgono, secondo la teoria BCS (Bardeen, Cooper e Schrieffer, 1957), il moto di coppie di elettroni, dette coppie di Cooper; queste coppie

possono essere descritte da una funzione d'onda univoca in quanto si trovano in un unico stato quantico macroscopico.

La funzione d'onda di ogni coppia può essere scritta

$$\Psi = \rho_s^{1/2} e^{i\vartheta(r)} = \rho_s^{1/2} e^{i(p \cdot r)/\hbar} \quad (\text{A.2})$$

dove ρ_s è la densità di coppie di elettroni, ϑ è la fase della funzione d'onda, r è la posizione del centro di massa e p l'impulso generalizzato; quest'ultimo, in un campo magnetico, si può esprimere

$$p = p_{cin} + p_{pot} = m\nu_s + qA \quad (\text{A.3})$$

dove ν_s è la velocità del centro di massa, A è il potenziale vettore; ora introducendo la densità di corrente $j_s = -\rho_s\nu_s$ e sostituendo nell'equazione precedente, si ottiene

$$p = -\frac{mj_s}{\rho_s} + qA \quad (\text{A.4})$$

Per assicurare che la funzione d'onda sia univoca la variazione di fase totale $\Delta\vartheta$, attorno all'anello superconduttore considerato, deve essere un multiplo intero di 2π

$$\Delta\vartheta = \oint_{\Gamma} \frac{p}{\hbar} \cdot dl = -\frac{m}{\hbar\rho_s} \oint_{\Gamma} j_s \cdot dl + \frac{q}{\hbar} \oint_{\Gamma} A \cdot dl = 2\pi n \quad (\text{A.5})$$

se si considera una curva Γ che circoli lungo l'anello presso il centro della sua

sezione, in modo da non avvicinarsi mai alla superficie, il termine in funzione della densità di corrente risulta nullo, ricordando inoltre che $B = \text{rot}A$ e applicando il teorema di Stokes, si ottiene

$$\Delta\vartheta = \frac{p}{\hbar} \phi = 2\pi n \quad (\text{A.6})$$

ecco dimostrato che il flusso intrappolato è una quantità quantizzata e deve quindi essere un multiplo di una quantità fisica fondamentale, ricordando, inoltre, che la carica considerata è quella di una coppia di Cooper, si trova

$$\phi = n \frac{\pi\hbar}{q_e} = n\phi_0 \quad (\text{A.7})$$

dove $\phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$ ed è il valore di un quanto di flusso.

Appendice B

Le giunzioni Josephson

Esprimendo con Ψ_1 l'ampiezza di probabilità di trovare una coppia di elettroni in un lato della giunzione e con Ψ_2 l'ampiezza di trovarla nell'altro, allora le due ampiezze sono correlate nel modo seguente[13]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = U_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (\text{B.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = U_2 \Psi_2 + K \Psi_1 \quad (\text{B.2})$$

dove K è una costante caratteristica della giunzione e U è l'energia dello stato di ciascun superconduttore. Gli stati dei due superconduttori risultano quindi accoppiate e se la giunzione è simmetrica (si stanno considerando superconduttori dello stesso tipo) U_1 sarebbe uguale ad U_2 . Se, però, si applica una differenza di potenziale V attraverso la giunzione, allora si ha

$$U_1 - U_2 = qV \quad (\text{B.3})$$

per convenienza si definisce lo zero dell'energia a metà di questo valore.

Riscrivendo le eq. B.1 e B.2 del sistema precedente, si trova

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (\text{B.4})$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \Psi_2 + K \Psi_1 \quad (\text{B.5})$$

esplicitando le funzioni d'onda

$$\Psi_1 = \rho_1^{1/2} e^{i\vartheta_1} \quad (\text{B.6})$$

$$\Psi_2 = \rho_2^{1/2} e^{i\vartheta_2} \quad (\text{B.7})$$

dove ϑ_1 e ϑ_2 sono le fasi ai due lati della giunzione, ρ_1 e ρ_2 sono le densità degli elettroni in questi due punti; sostituendo le espressioni per le funzioni d'onda nel sistema ed eguagliando le parti reali e immaginarie si ottengono quattro equazioni

$$\dot{\rho}_1 = +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta; \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta; \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{k}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \delta - \frac{qV}{2\hbar}; \quad \dot{\vartheta}_2 = -\frac{k}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta - \frac{qV}{2\hbar}; \quad (\text{B.9})$$

dove $\delta = \vartheta_1 - \vartheta_2$. Le prime due equazioni dicono che $\dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$; in realtà, non tengono conto dello squilibrio che si viene a creare tra il fluido di elettroni

ed il sottofondo di ioni positivi, descrivono come le densità comincerebbero a cambiare e quindi qual è il tipo di corrente che inizierebbe a fluire, cioè

$$J = +\frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\delta \quad (\text{B.10})$$

Tenendo conto che si sta considerando un circuito chiuso e che la differenza di potenziale è mantenuta costante, si può concludere che ϱ_1 e ϱ_2 non cambiano; la relazione precedente resta valida e si può, quindi, porre

$$\frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2} = J_0 \quad (\text{B.11})$$

con J_0 che sarà un numero caratteristico della particolare giunzione. L'equazione B.10 si può riscrivere in modo conciso nella forma

$$J = J_0 \sin\delta \quad (\text{B.12})$$

L'altra coppia di equazioni permette di avere informazioni sulla differenza di fase δ , semplicemente sottraendo l'una all'altra si ottiene

$$\dot{\delta} = \dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}_1 = \frac{qV}{\hbar} = \frac{2q_e V}{\hbar} = \frac{2\pi V}{\phi_0} \quad (\text{B.13})$$

L'eq. B.12 e l'eq. B.13 sono le due equazioni fondamentali per descrivere il comportamento delle giunzioni Josephson.

Bibliografia

- [1] P. Rapagnani: *Development and test at $T = 4.2K$ of a capacitive resonant transducer for cryogenic gravitational-wave antennas*. Il Nuovo Cimento Vol. 5C, No. 4 (1982)
- [2] P.Astone, M.Bassan, P.Bonifazi, P.Carelli, M.G.Castellano, G.Cavallari, E.Coccia, C.Cosmelli, V.Fafone, S.Frasca, E.Majorana, I.Modena, G.V.Pallottino, G.Pizzella, P.Rapagnani, F.Ricci, M.Visco: *Long-term operation of the Rome Explorer cryogenic gravitational wave detector*. Physical Review D Vol. 47, No. 2 (1993)
- [3] A.Vinante, M.Bonaldi, P.Falferi, M.Cerdonio, R.Mezzena, G.A.Prodi, S.Vitale: *Stabilization and optimization of a two-stage dc SQUID coupled to a high Q resonator*. Physica C Vol. 368, 176-180 (2002)
- [4] M.Cerdonio, G.A.Prodi, A.Ortolan, S.Vitale, J.P.Zendri: *Ultracryogenic resonant antennae to detect gravitational wave burst*. Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) Vol. 35, 75-78 (1994)
- [5] L.Baggio *et al.* (AURIGA Collaboration): *3-mode detection for widening the bandwidth of resonant gravitational wave detectors*. Physical Review Letters 94, 241101 (2005)

- [6] P.Falferi, M.Cerdonio, L.Franceschini, R.Macchietto, S.Vitale, J.P.Zendri: *A high kHz resonator with a quality factor larger than 10^6* . Review of Science Instrument Vol. 65, No. 9 (1994)
- [7] B.B.Babani: *Coil design and construction*. Bernard Babani Publishing Ltd (1984)
- [8] Steven T.Ruggiero, David A.Rudman: *Superconducting devices*. Boston, Mass.: Academic press(1990)
- [9] P.Pecoretti: *Caratterizzazione di un lock-in basato su di un dispositivo DSP*. Tesi di laurea, Univ. degli studi di Trento (2001-02)
- [10] Andrea Vinante: *Misure di back action di un dc SQUID a basso rumore*. Tesi di laurea, Univ. degli stuti di Trento (1997-98)
- [11] A.Vinante, R.Mezzena,G.A.Prodi, S.Vitale, M.Cerdonio, M.Bonaldi, P.Falferi: *Thermal noise in a high Q ultracryogenic resonator*. Review of Science Instrument Vol. 76, 074501 (2005)
- [12] H.Knoepfel: *Pulsed high magnetic fields*. North-Holland (1970)
- [13] Olli Lounasmaa, V.aut.: *Experimental principles and methods below 1 K*. New York, N.Y.: Academic press (1974)

Ringraziamenti

In questi anni dedicati all'università sono cambiate molte cose; hanno segnato un periodo di crescita che mi ha reso la persona che sono ora, nel bene o nel male. Molte persone hanno condiviso con me questo percorso, a partire da quelle che mi hanno accompagnato durante tutto il cammino ma senza dimenticare quelle che nonostante vi abbiano preso parte solo per un breve periodo hanno lasciato il segno.

Innanzitutto vorrei ringraziare il prof. G.A. Prodi per avermi dato la possibilità di lavorare alla tesi nel campo che più mi ha affascinato e per la cortese disponibilità che sempre ha dimostrato.

Un grazie a P. Falferi, A. Vinante e R. Mezzena per la grande disponibilità dimostrata e l'infinita pazienza durante le ore passate laboratorio e in generale in tutto il periodo della tesi.

Un grazie a tutti i compagni di università Marta, Francesca, Nicola, Lucia, Mattia e Paride, Laura, Marcello che hanno trasformato quest'ultimo anno in uno dei periodi più belli della mia vita.

Un grazie a Ketty e Roberto che loro malgrado hanno condiviso con me questi anni.

Un grazie speciale va ai miei genitori per il loro sostegno silenzioso e

discreto, ma deciso nei momenti cruciali e soprattutto per la fiducia incrollabile, forse mal riposta, che mi hanno sempre dimostrato; a mia sorella per il forte sostegno morale e logistico in cui ha sempre messo il massimo impegno; a mio fratello che nonostante viva in un altro stato ha sempre mantenuto un occhio sui miei progressi, pronto a fornire quel genere di consigli che fanno la differenza; a mia zia Clara che malgrado la spiccata curiosità, mi ha aiutato sempre e con tutti i mezzi a sua disposizione.

Un grazie ad Elisa per le interminabili chiacchierate, per le disquisizioni, per i consigli, per il supporto nelle piccole e nelle grandi cose e per mille altri motivi un Grazie di cuore.

Un grazie particolare a Fabio C. e Nicola Z., compagni di vita da tempo immemorabile che, nonostante nel tempo le nostre strade abbiano preso direzioni diverse, nel momento del bisogno ci sono sempre stati.