

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Fisica

**Misure di back action  
di un dc SQUID a basso rumore**

Relatore:

**Prof. STEFANO VITALE**

Laureando:

**ANDREA VINANTE**

Correlatori:

**Dott. MICHELE BONALDI**

**Dott. PAOLO FALFERI**

Anno Accademico 1997-98

# Indice

|   |            |
|---|------------|
| <b>Indice.....</b>  | <b>i</b>   |
| <b>Introduzione .....</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1 Il rivelatore di onde gravitazionali AURIGA.....</b>                                       | <b>1</b>   |
| 1.1 Introduzione.....   | 1          |
| 1.2 L'amplificatore.....  | 2          |
| 1.3 Linee di sviluppo.....  | 5          |
| 1.4 Obiettivi della tesi.....   | 6          |
| <b>2 Il dc SQUID .....</b>  | <b>9</b>   |
| 2.1 La giunzione Josephson.....   | 9          |
| 2.2 Il dc SQUID.....  | 11         |
| 2.3 dc SQUID reali.....   | 14         |
| 2.4 Il dc SQUID come amplificatore di corrente.....   | 16         |
| <b>3 Comportamento di un oscillatore elettrico ad alto Q<br/>accoppiato a un dc SQUID .....</b> | <b>21</b>  |
| 3.1 Oscillatore elettrico disaccoppiato .....   | 21         |
| 3.2 Oscillatore elettrico accoppiato a un dc SQUID .....  | 24         |
| <b>4 Apparato sperimentale .....</b>  | <b>31</b>  |
| 4.1 Discendente e schermi .....   | 32         |
| 4.2 Oscillatore.....  | 35         |
| 4.3 Dissipatore .....   | 37         |
| 4.4 SQUID e accoppiamenti .....   | 38         |
| 4.5 Criostato, attenuazione delle vibrazioni e termometria .....                                | 42         |
| <b>5 Metodi di misura.....</b>  | <b>45</b>  |
| 5.1 Misura del rumore dell'oscillatore .....  | 45         |
| 5.2 Misura di fattore di qualità e frequenza di risonanza.....                                  | 48         |
| 5.3 Misura di calibrazione .....  | 51         |
| 5.4 Misura del rumore a banda larga.....  | 54         |

|   |            |
|---|------------|
| <b>6 Risultati sperimentali.....</b>  | <b>57</b>  |
| 6.1 Misure a basso accoppiamento.....   | 59         |
| 6.1.1 Test con pick-up $k=0.02$ , $\nu_0=266$ Hz.....   | 59         |
| 6.1.2 Test con pick-up $k=0.005$ , $\nu_0=927$ Hz.....  | 64         |
| 6.1.3 Discussione.....  | 76         |
| 6.2 Misure ad alto accoppiamento.....   | 80         |
| 6.2.1 Test con pick-up $k=0.15$ , $\nu_0=943$ Hz.....   | 80         |
| 6.2.2 Test con pick-up $k=0.56$ , $\nu_0=1032$ Hz.....  | 87         |
| 6.2.3 Discussione.....  | 92         |
| <b>7 Conclusioni.....</b>   | <b>97</b>  |
| <b>A Elettrodeposizione degli schermi superconduttori.....</b>                                  | <b>99</b>  |
| <b>B Dissipazioni di un cilindro conduttore</b><br><b>in un campo magnetico oscillante.....</b> | <b>103</b> |
| <b>C Filtraggio del lock-in .....</b>   | <b>107</b> |
| <b>Bibliografia .....</b>   | <b>109</b> |

## Introduzione

In questo lavoro di tesi è stato messo a punto un metodo per la misura e caratterizzazione del rumore di back action di un amplificatore dc SQUID, cioè il rumore che quest'ultimo inietta nel sistema misurato. Il metodo di misura si basa sull'utilizzo di un oscillatore elettrico con  $Q > 10^6$  fortemente accoppiato al dc SQUID.

Questo lavoro si è svolto nell'ambito dell'esperimento AURIGA, il rivelatore ultracriogenico risonante di onde gravitazionali attualmente in operazione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN.

Uno dei limiti della sensibilità del rivelatore è dato dalla temperatura di rumore dell'amplificatore [1], che nel caso specifico è un dc SQUID: nell'ambito di un progetto di incremento della sensibilità del rivelatore che punta a raggiungere tale limite è necessaria una conoscenza precisa e una caratterizzazione delle proprietà del dc SQUID, in particolare del rumore di back action del quale non esistono al momento risultati sperimentali noti.

Nel capitolo 1 vengono discussi in modo più approfondito gli obiettivi del lavoro e le sue implicazioni all'interno dell'esperimento AURIGA.

Nel capitolo 2 sono descritte le principali proprietà del dc SQUID, in particolare quelle che sono rilevanti ai fini di questo esperimento.

Nel capitolo 3 viene sviluppato un modello analitico del sistema costituito da un dc SQUID e da un oscillatore elettrico ad alto  $Q$ .

I successivi capitoli riguardano la parte sperimentale vera e propria, con descrizione dell'apparato sperimentale utilizzato (cap. 4) e dei metodi di misura (cap. 5) e la presentazione e discussione dei risultati sperimentali (cap. 6).

# 1 Il rivelatore di onde gravitazionali AURIGA

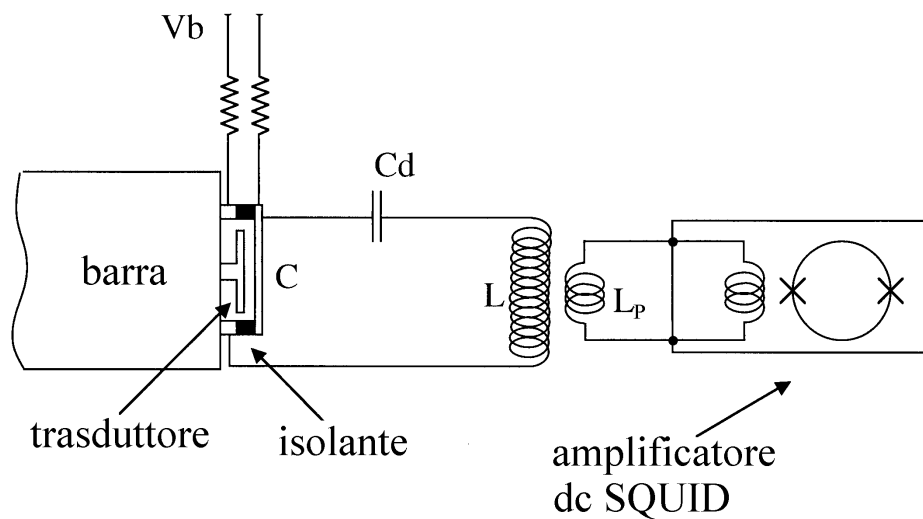
## 1.1 Introduzione

Il rivelatore AURIGA è costituito da una barra risonante in lega di alluminio Al5056 raffreddata alla temperatura di 200 mK mediante un refrigeratore a diluizione, con una frequenza fondamentale longitudinale dell'ordine di 1 kHz e un fattore di qualità dell'ordine di  $10^7$ . La barra può essere modellata da un sistema di due masse unite da una molla: un'onda gravitazionale ha la proprietà di modificare la distanza fra le due masse e quindi produce una forza che eccita il modo oscillatorio.

La vibrazione meccanica della barra viene convertita da un trasduttore elettromeccanico in un segnale elettrico che è misurato da un amplificatore a basso rumore.

Il rivelatore AURIGA è equipaggiato con un trasduttore capacitivo e utilizza un dc SQUID come amplificatore a basso rumore (fig.1.1).

Ad una faccia della barra è applicato un piatto vibrante libero ai bordi che costituisce una delle facce di un condensatore piano; l'altra faccia è solidale alla barra, dalla quale è elettricamente isolata. La frequenza del modo flessurale fondamentale del piatto è sintonizzata sulla frequenza fondamentale della barra. Si dimostra che se la massa della barra è molto maggiore di quella del piatto l'energia meccanica si trasferisce quasi completamente in quest'ultimo, che vibra quindi con un'ampiezza assai maggiore (trasformazione di impedenza meccanica).



**Figura 1.1:** *schema della catena di trasduzione del rivelatore AURIGA, con il trasduttore capacitivo e il dc SQUID usato come amplificatore a basso rumore.*

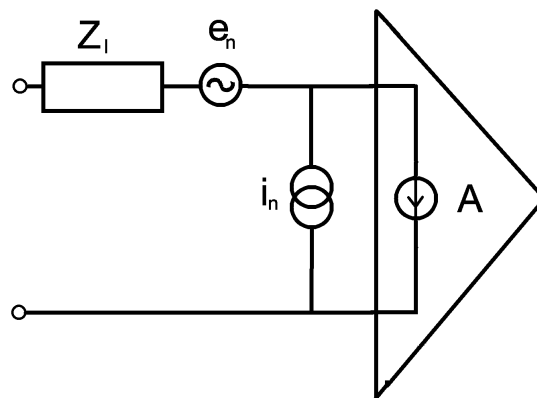
Polarizzando il condensatore a carica costante le vibrazioni del piatto si traducono in variazioni di capacità producendo un segnale in corrente. Il segnale viene accoppiato induttivamente al dc SQUID attraverso un trasformatore superconduttore, che realizza il necessario matching fra il condensatore, che ha un'elevata impedenza, e il dc SQUID che ha invece un'impedenza di ingresso piccolissima.

## 1.2 L'amplificatore

Il dc SQUID può essere modellato come vedremo nel cap. 2 come un amplificatore reale di corrente. Un amplificatore reale di corrente è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- 1) modifica i parametri del sistema in ingresso attraverso un'impedenza di ingresso  $Z_i$  che per un amplificatore ideale sarebbe nulla.
- 2) aggiunge rumore al segnale in ingresso, e ciò si può rappresentare mediante una sorgente di rumore in corrente  $i_n$  in parallelo all'amplificatore stesso.
- 3) perturba il sistema misurato iniettando del rumore sul sistema stesso e quindi eccitandolo (rumore di "back action"): la maniera più naturale per modellare questo effetto è porre una sorgente di rumore in tensione  $e_n$  in serie all'amplificatore.

Riassumendo si può modellare un amplificatore reale di corrente come descritto in fig.1.2:



**Figura 1.2:** *modello di amplificatore reale di corrente*

Osserviamo che in un amplificatore di tensione i ruoli delle sorgenti di rumore in tensione e corrente sarebbero invertiti rispetto a un amplificatore di corrente.

Le proprietà di rumore dell'amplificatore si possono caratterizzare anche attraverso la resistenza di rumore  $R_N$  e la temperatura di rumore  $T_N$ , definite rispettivamente da:

$$R_N = \sqrt{\frac{S_e}{S_i}} \quad (1.1)$$

$$k_B T_N = \sqrt{S_e S_i}$$

dove  $S_e$  e  $S_i$  sono le densità spettrali di potenza del rumore in tensione e del rumore in corrente.

Supponiamo ora che l'amplificatore sia usato per misurare l'energia di un rivelatore di onde gravitazionali. Si può dimostrare che la minima energia che può essere misurata dall'amplificatore è data da [1]:

$$E_{\min} = 2k_B T_N \quad (1.2)$$

Questa condizione può essere raggiunta nel caso ideale in cui il sistema misurato è privo di dissipazione; in un sistema reale si cerca di approssimare il limite realizzando un matching di impedenza, cioè scegliendo opportunamente i parametri circuitali per ottimizzare il rapporto segnale-rumore è [2].

Corrente e tensione all'ingresso dell'amplificatore si comportano come variabili coniugate: la conseguenza è che qualunque amplificatore lineare è intrinsecamente limitato dal principio di indeterminazione. Se l'amplificatore viene accoppiato a un oscillatore elettrico o meccanico con frequenza  $\omega$  ciò si esprime attraverso la relazione [1].

$$k_B T_N \geq \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (1.3)$$

cioè l'amplificatore non può misurare variazioni di energia inferiori a un singolo quanto. Questo è anche il limite teorico di sensibilità per un rivelatore risonante di onde gravitazionali del tipo AURIGA.



### 1.3 Linee di sviluppo

Una delle attuali linee di sviluppo dell'esperimento AURIGA prevede in un prossimo futuro la realizzazione di una nuova catena di trasduzione basata su un dc SQUID e comprendente un sistema di tuning elettromeccanico in grado di ottimizzare il matching fra antenna e amplificatore e approssimare quindi il limite imposto dalla temperatura di rumore dello SQUID.

Quest'ultimo punto può essere illustrato riferendosi alla figura 1.1: la capacità del trasduttore e il primario del trasformatore di matching formano un'oscillatore elettrico LC che costituisce quindi un terzo modo oscillatorio da aggiungere ai due modi meccanici (barra e trasduttore). Si può dimostrare [3] che è possibile massimizzare il trasferimento di energia dall'antenna all'amplificatore, ovvero ottimizzare il matching, sintonizzando il modo elettrico sui modi meccanici. Questo accorgimento non è ancora stata implementato su antenne reali, perché insorgono due tipi di problema:

- 1) La realizzazione pratica del tuning è tecnicamente difficile perché si richiede una regolazione dell'ordine di 1Hz in ambiente criogenico.
- 2) Il modo elettrico può degradare il fattore di qualità dei modi meccanici e peggiorarne il rumore, per esempio mediante pick-up di interferenze elettromagnetiche.

Per quanto riguarda il primo punto è già stata dimostrata la fattibilità di un sistema di tuning del modo elettrico in cui la frequenza di risonanza viene variata avvicinando o allontanando dalla bobina un cilindro superconduttore movimentato da un motorino elettrico. E' stato inoltre dimostrato che tale sistema non degrada il Q del modo elettrico [4].

Per dimostrare la fattibilità del progetto di tuning rimane da mostrare che è possibile realizzare un oscillatore LC con  $Q \geq 10^6 - 10^7$  in cui il rumore è essenzialmente termico. E' inoltre necessario misurare e caratterizzare alle

frequenze di interesse il rumore di back action del dc SQUID, parametro che è necessario conoscere per scegliere i parametri circuitali ( massa e capacità del trasduttore, induttanze di primario e secondario del trasformatore), che ottimizzano il matching di impedenza fra antenna e amplificatore.

## **1.4 Obiettivi della tesi**

L'obiettivo principale di questo lavoro di tesi è misurare il rumore di back action di un dc SQUID a basso rumore dello stesso tipo di quello attualmente impiegato in AURIGA. La misura verrà effettuata a frequenze dell'ordine di 1 kHz, che è la frequenza di lavoro del rivelatore.

L'unica misura di questo tipo riportata in letteratura é quella di Martinis e Clarke [5] che però è stata effettuata su uno SQUID fabbricato volutamente con parametri non ottimali in modo da presentare un rumore 2 ordini di grandezza maggiore rispetto a un dc SQUID tipico. Non esistono invece risultati sperimentali riguardanti effetti di back action di un dc SQUID a basso rumore: i risultati che si otterranno in queste prove sperimentali saranno quindi confrontati con delle stime teoriche ricavate dai modelli più recenti del dc SQUID.

L'idea che sta alla base della misura è accoppiare fortemente lo SQUID a un oscillatore elettrico superconduttore con fattore di qualità variabile fra  $10^4$  e più di  $10^6$ . Quest'ultimo presenta alla risonanza un'impedenza in serie che è una resistenza pura il cui valore è inversamente proporzionale al fattore di qualità. Aumentando il fattore di qualità l'eccitazione del modo oscillatorio prodotta dal rumore di back action aumenta fino a diventare distinguibile dal rumore termico dell'oscillatore che invece rimane costante.

Questo tipo di misura richiede la messa a punto di un oscillatore elettrico con  $Q$  superiore al milione ma al tempo stesso con un elevatissimo isolamento dai disturbi esterni di origine elettromagnetica e vibrazionale, tale da rendere questi ultimi trascurabili rispetto al rumore termico in condizioni sperimentali riproducibili. E' evidente infatti che questi disturbi rischiano di inquinare la misura in quanto sono difficilmente distinguibili da effetti di back action. Anche la dimostrazione di fattibilità di un simile sistema ha una sua motivazione all'interno dell'esperimento AURIGA in quanto mostrerebbe che il modo elettrico non introduce nel rivelatore rumore in eccesso rispetto al rumore termico.



## 2 Il dc SQUID

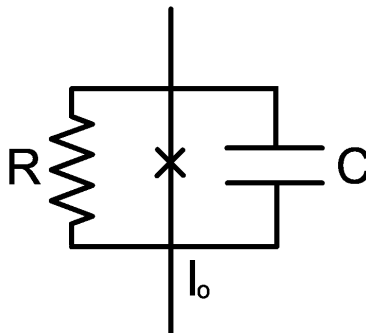
### 2.1 La giunzione Josephson

Una giunzione Josephson è costituita da un sottile strato di isolante interposto fra due elementi superconduttori; se lo strato è sufficientemente sottile si ha il passaggio di una corrente misurabile costituita da coppie di Cooper che attraversano per effetto tunnel la barriera di potenziale costituita dall'isolante; il tunneling è coerente, cioè rappresenta un fenomeno collettivo che può essere descritto attraverso un parametro d'ordine.

Il fenomeno è stato predetto teoricamente da Josephson nel 1962 attraverso le seguenti equazioni che legano tensione ai capi della giunzione e supercorrente alla grandezza  $\delta$  che è la discontinuità della fase del parametro d'ordine fra le facce della giunzione:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \sin(\delta) \\ V &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \dot{\delta} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$I_0$  è detta corrente critica e  $\Phi_0 = h/2e = 2.07 \cdot 10^{-15}$  Wb è il quanto di flusso magnetico.



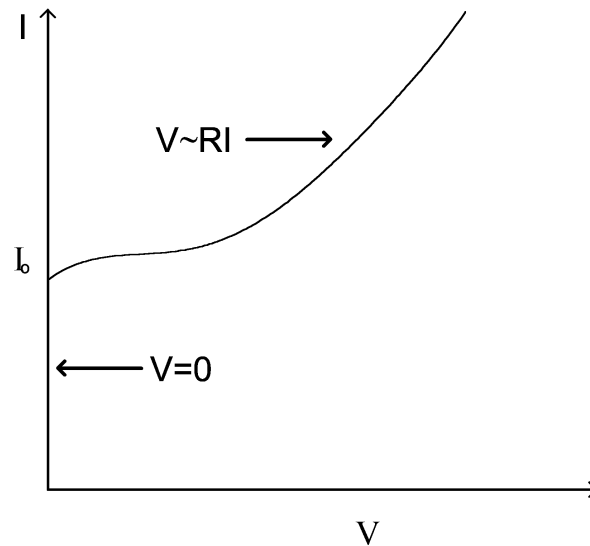
**Figura 2.1:** rappresentazione di una giunzione Josephson nel modello RSJ

Consideriamo ora il modello RSJ ( “Resistively Shunted Junction” ) che tiene conto della capacità parassita  $C$  della giunzione e di una resistenza di shunt  $R$  (fig. 2.1) che può essere fisicamente aggiunta in parallelo alla giunzione [6].

Tenendo conto dell’equazione (2.1) si può scrivere l’equazione che determina la dinamica della giunzione RSJ:

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\delta} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\delta} = I - I_0 \sin(\delta) \quad (2.2)$$

Risolvendo l’equazione (2.2) si ricava la caratteristica I-V della giunzione (fig. 2.2). La caratteristica presenta due regioni ben definite: per  $I < I_0$  si ha un regime di supercorrente in cui tutta la corrente passa attraverso la giunzione e  $V=0$  mentre per  $I >> I_0$  si ha un andamento ohmico con  $V \sim RI$ .



**Figura 2.2:** caratteristica I-V di una giunzione Josephson non isteretica.

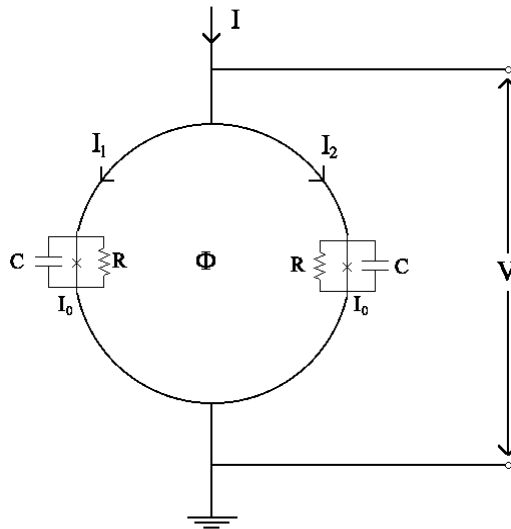
Si dimostra che la caratteristica non presenta fenomeni di isteresi nella zona di transizione da un regime all’altro solo se vale la condizione:

$$\frac{2\pi I_0 R}{\Phi_0} RC \leq 1 \quad (2.3)$$

In pratica per realizzare una giunzione non isteretica è necessario aggiungere in parallelo alla giunzione una resistenza di shunt sufficientemente piccola da soddisfare la (2.3).

## 2.2 Il dc SQUID

Il dc SQUID è essenzialmente un trasduttore di flusso magnetico verso tensione che sfrutta due fenomeni tipici della superconduttività: l'effetto Josephson e la quantizzazione del flusso magnetico che attraversa un anello superconduttore.



**Figura 2.3** : rappresentazione schematica di un dc SQUID

L'elemento fondamentale di un dc SQUID (fig. 2.3) è un anello superconduttore di induttanza  $L$  interrotto da due giunzioni Josephson, ognuna delle quali è in parallelo alla sua capacità parassita  $C$  e a una resistenza di

shunt  $R$  tale da soddisfare la condizione di non istereticità (2.3). L'anello viene polarizzato da una corrente di bias costante di poco superiore al doppio della corrente critica di una singola giunzione.

Per studiare in dettaglio il comportamento e le proprietà di un dc SQUID è necessario considerare anche le sorgenti di rumore: queste sono associate alle due resistenze di shunt delle giunzioni, che in base al teorema di Nyquist sono assimilabili a generatori di rumore in corrente con spettro di potenza bianco:

$$S_I = \frac{2k_B T}{R} \quad (2.4)$$

Tenendo conto di ciò possiamo scrivere in forma completa le equazioni dello SQUID, che tecnicamente costituiscono un sistema di due equazioni di Langevin non lineari in  $I_1$  e  $I_2$  accoppiate:

$$\begin{cases} \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\delta}_1 + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\delta}_1 = \frac{I}{2} - J - I_0 \sin(\delta_1) + I_{N_1} \\ \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\delta}_2 + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\delta}_2 = \frac{I}{2} + J - I_0 \sin(\delta_2) + I_{N_2} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi + LJ)$$

$$V = \frac{\pi}{\Phi_0} (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2)$$

Si sono supposte le due giunzioni uguali:  $I = I_2 + I_1$  è la corrente di bias, mentre con  $I_N$  si denotano le correnti di rumore generate termicamente nei resistori.

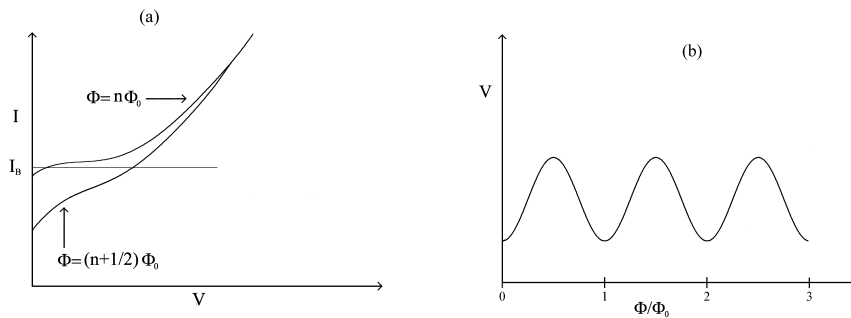
La terza equazione esprime la quantizzazione del flusso;  $J = I_2 - I_1$  è la corrente netta che circola nell'anello e produce un flusso aggiuntivo  $LJ$ . La quarta è l'equazione di Josephson per la tensione totale ai capi dello SQUID.

Le equazioni sono state risolte da Tesche e Clarke [7][8] con simulazioni numeriche nell'ipotesi di non istericità (2.3).



I risultati si possono così sintetizzare:

- ◆ La caratteristica I-V è simile a quella di una singola giunzione Josephson, ma la corrente critica effettiva dipende periodicamente dal flusso magnetico applicato con periodo dato da  $\Phi_0$  (fig. 2.4 (a)).
- ◆ Ad una fissata corrente di bias  $I_b$  (fig. 2.4 (a)) V è funzione del flusso  $\Phi$  applicato allo SQUID: la caratteristica V -  $\phi$  è periodica con minimo per  $\phi=n\phi_0$ , massimo per  $\phi=(n+1/2)\phi_0$ , e massimo della funzione di trasferimento  $V_\phi = |\partial V/\partial \Phi|$  per  $\phi=(2n+1)/4\phi_0$  (fig. 2.4 (b)).



**Figura 2.4:** caratteristiche I-V a  $I$  costante (a) e caratteristica V- $\Phi$  a I costante (b) in un dc SQUID.

- ◆ Al flusso  $\phi=(2n+1)/4\phi_0$  e alla corrente  $I$  ottima che massimizza  $V_\phi$  si ha:

$$\begin{aligned} V_\phi &\approx \frac{R}{L} \\ S_V &\approx 8k_B TR \\ S_J &\approx \frac{5.5k_B T}{R} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$S_V$  e  $S_J$  rappresentano rispettivamente gli spettri di potenza bianchi (bilateri) del rumore in tensione ai capi dello SQUID  $V_N$  e del rumore nella corrente circolante nello SQUID  $J_N$ .

### 2.3 dc SQUID reali

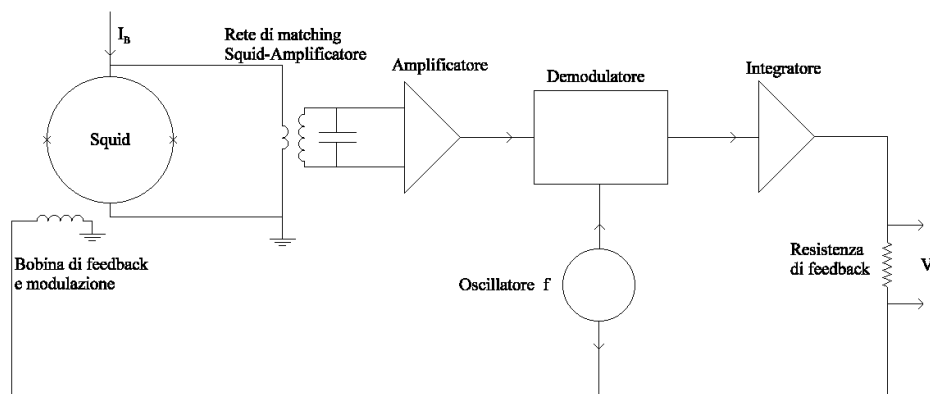
Gli SQUID attuali sono invariabilmente realizzati con tecniche litografiche su film sottile, sfruttando le stesse tecnologie già sviluppate per la microelettronica a semiconduttore. Questo garantisce di ottenere dispositivi molto compatti e affidabili.

Tipicamente su un unico chip sono realizzati sia lo SQUID vero e proprio che l'induttanza di ingresso, costituita generalmente da una bobina planare a spirale realizzata attorno allo SQUID in modo da massimizzare l'accoppiamento induttivo a quest'ultimo. Il sensore vero e proprio di flusso magnetico, costituito da un'ulteriore loop ( "pick-up" loop ) collegato in serie alla bobina di ingresso, può quindi essere spostato a piacimento all'interno dell'apparato sperimentale mentre lo SQUID con la bobina di ingresso può essere racchiuso in uno schermo superconduttore apposito per evitare l'ingresso di rumore in flusso.

Il segnale in uscita deve essere amplificato da un dispositivo a basso rumore, tale da non degradare in maniera sostanziale il rumore complessivo

del sistema. In linea di principio ciò è possibile sfruttando tecniche elettroniche standard basate sull'uso di amplificatori a FET.

La tipica configurazione di amplificazione è schematizzata in fig. 2.5: lo SQUID viene modulato da un flusso ac di ampiezza picco-picco pari a  $\Phi_0/2$  ad una frequenza  $f$  molto superiore a quelle di lavoro (tipicamente  $f$  è dell'ordine di 100 kHz). Lo stadio di amplificazione viene realizzato da un dispositivo a FET accoppiato all'uscita dello SQUID tramite un circuito risonante, sintonizzato alla frequenza di modulazione  $f$ , che realizza l'opportuno adattamento di impedenza necessario affinché il rumore del FET



**Figura 2.5 :** Schema della configurazione di amplificazione a “flux locked loop” del segnale in uscita dello SQUID.

risultati trascurabile rispetto a quello dello SQUID; in alternativa al circuito risonante si può usare come rete di matching un trasformatore freddo a nucleo ferromagnetico. Il segnale che viene infine demodulato presenta ancora una caratteristica  $V-\Phi$  periodica.

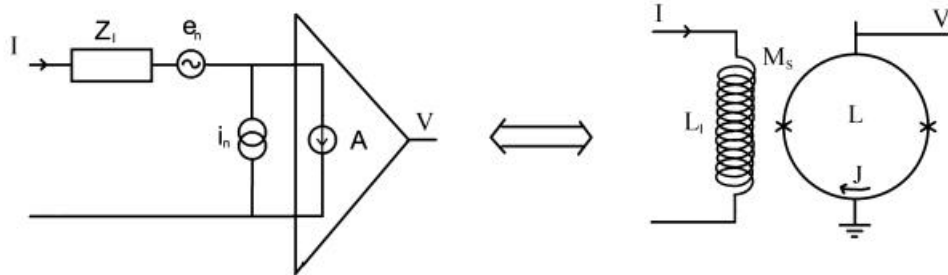
L'uscita demodolata e amplificata può essere riportata sotto forma di flusso sullo SQUID loop attraverso un'opportuna rete di feedback (configurazione in flux-locked loop o a loop chiuso): questo permette di

stabilizzare il punto di lavoro e linearizzare la caratteristica  $V-\Phi$  su un range superiore al quanto. E' necessario porre sufficiente attenzione affinché la rete di feedback introduca nello SQUID un rumore in flusso che sia trascurabile rispetto al rumore intrinseco.

In alternativa si può lavorare direttamente a loop aperto, rinunciando al feedback: in questo caso si perde in stabilità e in linearità, e lo SQUID può essere considerato un amplificatore lineare solo nel limite di piccoli segnali.

## 2.4 Il dc SQUID come amplificatore di corrente

Consideriamo ora lo SQUID come un amplificatore di corrente<sup>1</sup> ( vedi fig. 2.6):



**Figura 2.6 :** *Rappresentazione del dc SQUID come amplificatore di corrente*

Il guadagno dell'amplificatore, ovvero la funzione di trasferimento corrente-tensione, è dato da:

$$A = M_S V_\Phi \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Per amplificatore di corrente intendiamo un dispositivo che produce un'uscita proporzionale alla corrente in ingresso. Un dc SQUID trasforma la corrente in ingresso in una tensione in uscita, ed è caratterizzato quindi da una funzione di trasferimento che ha le dimensioni di un'impedenza.

dove  $M_S$  è la mutua induzione fra bobina di ingresso e SQUID.

Il rumore in corrente  $i_n$  è semplicemente il rumore in tensione ai capi dello SQUID  $V_N$  riportato formalmente in ingresso, mentre il rumore in tensione  $e_n$  è l'effetto reale di back action dovuto al flusso indotto nella bobina di ingresso dal rumore  $J_N$  nella corrente circolante attorno allo SQUID: più precisamente si hanno le relazioni:

$$S_i = \frac{S_v}{A^2} = \frac{S_v}{V_\Phi^2 M_S^2} \quad (2.8)$$

$$S_e = \omega^2 M_S^2 S_j$$

Nella maggior parte degli esperimenti il rumore di back action è completamente trascurabile e le proprietà del dc SQUID si caratterizzano con il solo rumore in corrente  $i_n$ . Un parametro spesso utilizzato per confrontare SQUID diversi è dato dalla risoluzione in energia  $\epsilon$ , che si ottiene esprimendo la densità spettrale  $S_i$  in unità di energia per unità di banda :

$$\epsilon = L_1 S_i = L_1 \frac{S_v}{A^2} \quad (2.9)$$

Una delle principali difficoltà nell'abbassare tale valore è connessa con la condizione di non istereticità (2.3), che impone un limite superiore alla resistenza  $R$  della giunzione e quindi alla densità spettrale  $S_v$ .

E' comodo esprimere la relazione fra le due sorgenti di rumore invece che con una resistenza di rumore con un'induttanza di rumore, definita dalla relazione:

$$\omega L_N = R_N = \sqrt{\frac{S_e}{S_i}} \quad (2.10)$$

Dalle formule (2.6), (2.8) e (2.10) si ricava che l'induttanza di rumore del dc SQUID è costante e, nell'ipotesi che l'accoppiamento  $\alpha^2 = M^2/LL_1$  sia dell'ordine dell'unità, come accade generalmente negli SQUID reali, è data approssimativamente dall'induttanza di ingresso:

$$L_N = \sqrt{\frac{11}{16}} \alpha L_1 \approx L_1 \quad (2.11)$$

L'impedenza di ingresso di un dc SQUID è data in prima approssimazione dall'induttanza  $L_1$  della sua bobina di ingresso. Esistono però degli effetti secondari associati all'effetto di schermaggio dello SQUID: tali effetti sono già stati previsti teoricamente [9] e misurati sperimentalmente [9] [10].

Più precisamente essendo lo SQUID un dispositivo intrinsecamente non lineare si deve parlare di impedenza dinamica di ingresso; gli effetti secondari sopra citati sono per l'appunto non lineari, nel senso che dipendono dal punto di lavoro sulla caratteristica  $V-\phi$ , oltre che dalla corrente di bias. Il risultato fondamentale del modello di Hilbert e Clark [9] è che l'effetto di schermaggio dello SQUID produce un'impedenza dinamica con una parte reale e una parte immaginaria proporzionali alla quantità  $J_\phi = |\partial J / \partial \Phi|$ , dove  $J$  è la corrente circolante attorno allo SQUID loop, che dipende in generale dal punto di lavoro, e  $\Phi$  è il flusso applicato in ingresso. Per SQUID tipici queste correzioni sono sempre 2-3 ordini di grandezza più piccole dell'impedenza dell'induttanza di ingresso. La parte reale però pur essendo molto piccola, può produrre effetti indesiderati nel caso di accoppiamento forte con oscillatori ad elevato  $Q$ : infatti il modello prevede che  $\text{Re}(Z_i)$  possa essere a seconda del punto di lavoro sia positiva che negativa, e in quest'ultimo caso lo SQUID può arrivare a "pompare" ( $Q < 0$ ) l'oscillatore rendendo il sistema instabile.

La situazione si complica se si cerca di estendere questi risultati a uno SQUID operato in loop chiuso. E' intuitivo che il feedback tende a diminuire a parità di segnale in ingresso le variazioni di flusso nello SQUID loop, diminuendo in proporzione  $J_\phi$ . Tuttavia possono insorgere effetti di origine

completamente diversa: per esempio è noto che, se esiste una mutua induttanza parassita fra la bobina di ingresso e quella di feedback, i ritardi di fase nella corrente di feedback introdotti dalla catena di amplificazione-demodulazione produrranno nuovamente una parte reale nell'impedenza di ingresso [11].

Per quelli che sono i nostri scopi modelleremo l'impedenza di ingresso con una resistenza  $R_f$  in serie all'induttanza  $L_f$  della bobina di ingresso. Faremo inoltre l'assunzione della proprietà di "cold damping", cioè del fatto che  $R_f$  non produce rumore pur essendo equivalente a una resistenza dal punto di vista circuitale: questa proprietà è dovuta al fatto che la resistenza  $R_f$  è un prodotto del feedback e non è quindi associata a un elemento dissipante reale. Questa ipotesi è fondamentale per l'interpretazione dei dati e verrà quindi appositamente verificata sperimentalmente.





### 3 Comportamento di un oscillatore elettrico ad alto Q accoppiato a un dc SQUID

In questo capitolo verrà presentato un modello analitico di un sistema composto da un oscillatore ad alto Q fortemente accoppiato a un dc SQUID attraverso un trasformatore superconduttore. Nel paragrafo 3.1 verranno riassunte brevemente le proprietà di un oscillatore LC disaccoppiato e si studierà il suo comportamento rispetto al rumore termico e non termico. Nel paragrafo 3.2 si generalizzerà il modello includendo le proprietà dello SQUID, il rumore di back action e l'impedenza di ingresso.

#### 3.1 Oscillatore elettrico disaccoppiato

Consideriamo un oscillatore elettrico RLC isolato dall'esterno; le oscillazioni libere della corrente sono descritte dall'equazione:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0 \quad (3.1)$$

Introducendo il fattore di qualità e la frequenza di risonanza definiti da:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (3.2)$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

si può riscrivere l'equazione (3.1) nella forma seguente:

$$\ddot{I} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (3.3)$$

Limitandoci al caso sottosmorzato  $Q > 1$  le soluzioni sono oscillazioni smorzate del tipo:

$$I = I_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} e^{\pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t} \quad (3.4)$$

La frequenza di oscillazione è uguale alla frequenza di risonanza solo nel caso ideale di dissipazione nulla, cioè  $Q$  infinito, tuttavia nell'ipotesi  $Q \gg 1$  la discrepanza diventa nei casi pratici trascurabile essendo proporzionale a  $1/Q^2$ .

Il fattore di qualità risulta proporzionale alla costante di tempo del decadimento in ampiezza secondo la relazione:

$$Q = \frac{1}{2} \omega_0 \tau = \pi \nu_0 \tau \quad (3.5)$$

Inoltre si verifica facilmente che  $Q$  è pari a  $2\pi$  volte il rapporto fra l'energia totale e l'energia dissipata in un ciclo.

La risposta in frequenza del sistema a un segnale sinusoidale in tensione di ampiezza  $V$  in serie è data da:

$$I = YV$$

$$Y = \frac{1}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (3.6)$$

Supponiamo ora che in serie al circuito esista una sorgente di rumore in tensione con spettro di potenza bilatero  $S_V$ ; lo spettro di potenza del rumore in corrente sarà allora:

$$S_I = |Y|^2 S_V \quad (3.7)$$

dove  $|Y|^2$  è la curva lorentziana :

$$|Y|^2 = \frac{\frac{\omega^2}{L^2}}{\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (3.8)$$

Il valore di picco risulta proporzionale a  $Q^2$  mentre la larghezza di banda a metà ampiezza è proporzionale a  $1/Q$ . La varianza della corrente di rumore si

ottiene integrando  $S_I$  su tutto lo spettro: supponiamo a questo scopo di essere nell'ipotesi  $Q \gg 1$ : in tal caso l'integrando è una funzione molto piccata attorno a  $\pm\omega_0$  e si può porre:

$$|Y|^2 \approx \frac{1}{\omega_0^2 L^2} \frac{1}{\frac{1}{Q^2} + 4\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \frac{1}{\omega_0^2 L^2} \frac{1}{\frac{1}{Q^2} + 4\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (3.9)$$

Si ottiene quindi, riportandosi a integrali elementari, la varianza della corrente nell'oscillatore che è uguale al valore quadratico medio in quanto la media è nulla:

$$\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_I dv = \int_{-\infty}^{+\infty} S_V |Y|^2 dv = \frac{Q}{2\omega_0 L^2} S_V(\omega_0) \quad (3.10)$$

In particolare se l'oscillatore si trova all'equilibrio termico alla temperatura  $T$  esiste una sorgente di rumore in tensione  $S_T$  associata alla parte dissipativa del sistema, il cui spettro di potenza è dato dal teorema di Nyqvist:

$$S_T = 2k_B TR = 2k_B T \frac{\omega_0 L}{Q} \quad (3.11)$$

Sostituendo nell'equazione (3.10) si ottiene:

$$\langle I^2 \rangle_T = \frac{k_B T}{L} \quad (3.12)$$

Questo risultato si poteva anche dedurre come applicazione del teorema di equipartizione dell'energia al grado di libertà macroscopico dell'oscillatore. Il rumore termico ha la peculiare proprietà di non dipendere dal fattore di qualità, ma solo dalla temperatura: la ragione è che mentre l'integrale di  $|Y|^2$  cresce con  $Q$ , lo spettro  $S_T$  è proporzionale a  $R$  e quindi a  $1/Q$ .

Se il sistema non è perfettamente isolato sarà presente in generale del rumore di origine non termica, che può essere generato sia da rumore magnetico vero e proprio convertito dall'induttore  $L$  in rumore in tensione,

sia da disturbi acustico-vibrazionali riconvertiti in rumore elettrico dal campo magnetico DC presente nella zona dell'oscillatore.

Riassumeremo tutte queste sorgenti di rumore in flusso alla bobina con una sorgente di tensione  $V_F$ . Il corrispondente spettro di potenza  $S_F$  in generale dipende dalla frequenza, tuttavia per gli oscillatori a  $Q$  molto elevato e quindi a banda molto stretta il rumore in ingresso può essere considerato praticamente bianco. Il suo contributo alla varianza della corrente è dato quindi in base alla (3.10) da:

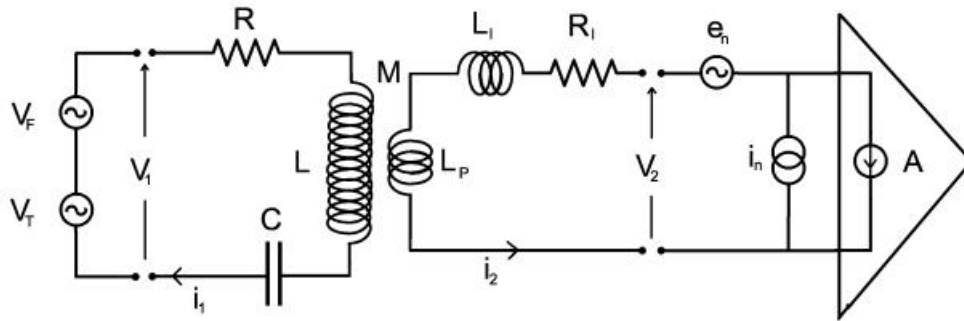
$$\langle I^2 \rangle_F = \frac{Q}{2\omega_0 L^2} S_F(\omega_0) \quad (3.13)$$

Il contributo del rumore in flusso è proporzionale a  $Q$ . Aumentando  $Q$  si richiede quindi un isolamento vibrazionale, acustico ed elettromagnetico sempre maggiore (cioè  $S_F$  sempre più piccolo) affinché il rumore in eccesso rimanga trascurabile rispetto al rumore termico.

### 3.2 Oscillatore elettrico accoppiato a un dc SQUID

Svilupperemo ora un modello generale (fig. 3.1) di un sistema composto da un dc SQUID accoppiato a oscillatore elettrico ad alto  $Q$  nella stessa configurazione adottata nell'esperimento.

Lo SQUID è schematizzato come un'amplificatore ideale di corrente con in più le due sorgenti di rumore  $e_n$  e  $i_n$  e la resistenza di ingresso fredda  $R_I$  che si aggiunge all'induttanza della bobina di ingresso  $L_I$ . Supporremo che  $R_I \ll \omega L_I$ , ipotesi che in genere è largamente soddisfatta negli SQUID reali, e che sarà poi verificata sperimentalmente. Gli spettri di potenza corrispondenti a  $e_n$  e  $i_n$  sono dati rispettivamente da  $S_e$  e  $S_i$ .



**Figura 3.1:** Schema del modello di oscillatore elettrico ad alto  $Q$  accoppiato a dc SQUID analizzato in questo capitolo.

L'oscillatore è un rappresentato come un semplice circuito LC a carichi concentrati. La dissipazione totale nell'oscillatore è riassunta in una resistenza  $R$  alla quale è associata la sorgente di rumore termico  $V_T$  con spettro di potenza  $S_T=2k_BTR$ . In generale bisognerà tener conto anche del rumore in flusso alla bobina mediante una sorgente di rumore in tensione  $V_F$  con spettro di potenza  $S_F$ .

L'accoppiamento fra SQUID e oscillatore viene effettuato mediante un trasformatore di flusso superconduttore formato dalla bobina di ingresso  $L_1$  e da un pick-up di induttanza  $L_P$  che viene accoppiato alla bobina  $L$  dell'oscillatore attraverso una mutua induzione  $M$ .

Ci proponiamo di valutare lo spettro di potenza della corrente circolante all'ingresso dello SQUID; per far questo definiamo le matrici di ammettenza  $Y(\omega)$  e di impedenza  $Z(\omega)$  del circuito visto come quadrupolo:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Gli indici 1 e 2 indicano rispettivamente la porta dell'oscillatore, sulla quale agiscono  $V_T$  e  $V_F$ , e la porta dello SQUID, sulla quale agisce  $e_n$ .

Lo spettro di potenza totale della corrente all'ingresso dello SQUID, nell'ipotesi di trascurare le correlazioni fra le sorgenti di rumore, è dato allora da:

$$S_{IN} = S_i + (S_T + S_F) |Y_{21}|^2 + S_e |Y_{22}|^2 \quad (3.15)$$

La matrice  $Z$  può essere facilmente ricavata scrivendo le equazioni del sistema nel dominio della frequenza. La matrice  $Y$  si ottiene quindi per inversione della  $Z$ :

$$Z = \begin{pmatrix} R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) & i\omega M \\ i\omega M & R_1 + i\omega(L_1 + L_p) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$Y = \frac{1}{\det(Z)} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{21} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix}$$

Scriviamo esplicitamente i moduli quadrati degli elementi di matrice che compongono la matrice  $Y$ :

$$\begin{aligned}
|Y_{11}|^2 &= \frac{\omega^2}{L_{\text{eq}}^2 \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} \right]} \\
|Y_{21}|^2 = |Y_{12}|^2 &= \frac{\omega^2 M^2}{(L_1 + L_p)^2 L_{\text{eq}}^2 \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} \right]} \\
|Y_{22}|^2 &= \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_1^2}{Q_1^2}}{\omega^2 (L_1 + L_p)^2 \left[ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} \right]}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

dove si sono introdotte per comodità le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned}
L_{\text{eq}} &= L - \frac{M^2}{L_1 + L_p} \\
R_{\text{eq}} &= R + R_1 \frac{M^2}{(L_1 + L_p)^2} \\
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_{\text{eq}} C}} \\
Q_1 &= \frac{\omega_1 L}{R} \\
Q &= \frac{\omega_0 L_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Il denominatore delle (3.17) è ancora quello tipico di un oscillatore LC disaccoppiato, ma con induttanza e resistenza equivalenti che sono modificate dall'accoppiamento con lo SQUID.

L'integrale delle (3.17) su tutto lo spettro può essere allora calcolato con la stessa tecnica usata per integrare la (3.9).

Per essere rigorosi nel termine  $|Y_{22}|^2$  anche il numeratore presenta un termine risonante che equivale a un filtro "notch" alla frequenza di risonanza intrinseca  $\omega_1$ . Affinchè il numeratore possa essere considerato quasi costante nell'intorno di  $\omega_0$  e quindi portato fuori dall'integrale è necessario fare l'ulteriore ipotesi:

$$|\omega_1 - \omega_0| \gg \frac{\omega_0}{Q} \quad (3.19)$$

che è verificata se l'accoppiamento è sufficientemente forte.

Risolvendo gli integrali delle (3.17) e sostituendo nella (3.15) si arriva infine a scrivere la varianza della corrente che circola all'ingresso dello SQUID e della corrispondente tensione in uscita, trascurando per ora il contributo del rumore a banda larga  $S_i$  che dipende dagli eventuali filtraggi applicati all'uscita dello SQUID:

$$\langle I^2 \rangle_{IN} = \frac{Q}{Q_{int}} \left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^2 \left[ \frac{k_B T}{L_{eq}} + \left( \frac{S_F}{2\omega_0 L_{eq}^2} + \frac{\left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^2 S_e}{2\omega_0 L_{eq}^2} \right) Q_{int} \right] \quad (3.20)$$

$Q_{int} = \omega_0 L_{eq} / R$  è il fattore di qualità "intrinseco" cioè quello che si avrebbe se la resistenza  $R_I$  dello SQUID non esistesse. La presenza di  $Q_{int}$  è una conseguenza dell'assunzione che  $R_I$  sia fredda e non dia contributo al rumore termico.

Nel secondo membro della (3.20) compaiono tre termini, che rappresentano rispettivamente il rumore termico, il rumore in flusso e il rumore di back action dello SQUID. Ci possono essere due situazioni limite semplificative:



a) L'accoppiamento sia così debole da rendere trascurabili gli effetti dello SQUID, cioè poniamo  $S_e=0$  e  $Q_{int}=Q$ . Esisteranno allora solo un contributo termico proporzionale a T e un contributo in flusso proporzionale a Q :

$$\langle I^2 \rangle_{IN} = \left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^2 \left( \frac{k_B T}{L_{eq}} + \frac{S_F}{2\omega_0 L_{eq}^2} Q \right) \quad (3.21)$$

Questo è lo stesso risultato che si è ottenuto per un oscillatore disaccoppiato, a parte il fattore  $M/(L_I + L_P)$  che trasforma la corrente circolante nella bobina nella corrente circolante nel trasformatore superconduttore.

I due contributi possono essere individuati sperimentalmente variando opportunamente i parametri T e Q.

b) Il sistema sia sufficientemente isolato da rendere trascurabile il rumore in flusso: il rapporto fra il contributo di back action che si cerca di misurare e il contributo termico è dato allora da:

$$\frac{\langle I^2 \rangle_{Back}}{\langle I^2 \rangle_T} = \frac{\left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^2 Q_{int} S_e}{2k_B T \omega_0 L_{eq}} \quad (3.22)$$

Per capire meglio il significato fisico della (3.22) introduciamo ora la costante k di accoppiamento fra il pick-up  $L_P$  e la bobina L, definita dalla nota relazione:

$$k^2 = \frac{M^2}{LL_P}, \quad k \leq 1 \quad (3.23)$$

L'equazione (3.22) può essere riscritta in termini di k e  $L_P$  nella seguente forma:

$$\frac{\langle I^2 \rangle_{Back}}{\langle I^2 \rangle_T} = \frac{k^2 Q_{int} S_e}{2k_B T \omega_0 L_I} \cdot \frac{L_P L_I}{(L_I + L_P)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k^2}{1 + \frac{L_I}{L_P}}} \quad (3.24)$$

Si vede dunque che per esaltare l'effetto di back action è necessario aumentare il più possibile  $Q_{\text{int}}$  e  $k$ . Inoltre si può dimostrare che fissando  $k$  e lasciando variare  $L_p$  l'espressione (3.24) è massima per:

$$L_p = L_I / \sqrt{1 - k^2} \quad (3.25)$$

che è la condizione che ottimizza il matching di impedenza fra SQUID e oscillatore. In prima approssimazione finchè  $k$  non diventa dell'ordine dell'unità la condizione (3.25) è equivalente a  $L_p \approx L_I$ .

Il limite superiore si ha quando vale la (3.25) e  $k \rightarrow 1$  ed è dato da:

$$\left( \frac{\langle I^2 \rangle_{\text{Back}}}{\langle I^2 \rangle_{\text{T}}} \right)_{\text{MAX}} = \frac{Q_{\text{int}} S_e}{2k_B T \omega_0 L_I} \quad (3.26)$$

## 4 Apparato sperimentale

Gli elementi essenziali richiesti da questo esperimento sono un oscillatore elettrico ad alto  $Q$  basato su una bobina superconduttrice, e un dc SQUID a basso rumore.

Per consentire la misurazione del rumore di back action dello SQUID l'apparato sperimentale deve possedere inoltre le seguenti caratteristiche:

- 1) L'oscillatore elettrico deve presentare un fattore di qualità intrinseco più elevato possibile.
- 2) Il fattore di qualità dell'oscillatore  $Q_{\text{int}}$  deve poter essere variato in ambiente criogenico, così da poter distinguere il rumore di back action proporzionale a  $Q_{\text{int}}$  dal rumore termico costante. Questo può essere ottenuto con un opportuno dissipatore.
- 3) L'ambiente nel quale sono alloggiati oscillatore e SQUID deve presentare un elevato isolamento dai disturbi elettromagnetici e vibrazionali provenienti dall'esterno, in modo tale da rendere trascurabile il rumore in flusso alla bobina di origine non termica.
- 4) La termalizzazione delle varie parti dell'apparato deve essere efficiente, per poter attribuire chiaramente il contributo termico al rumore e per evitare i drift dello SQUID.

In questo capitolo saranno descritte in dettaglio le varie parti di cui si compone l'apparato che è stato allestito e messo a punto nel corso del lavoro.

## 4.1 Discendente e schermi

L'apparato è contenuto in uno schermo superconduttore cilindrico che costituisce la parte inferiore di un discendente che viene immerso in un dewar di elio liquido; tale schermo è sostenuto da un tubo di acciaio attraverso il quale passano i fili di collegamento dei vari strumenti e l'asta di movimentazione di un dissipatore che verrà descritta più avanti. L'uso dell'acciaio in questa zona è legato alla sua bassa conducibilità termica oltre che alla sua resistenza meccanica, in quanto deve mettere in comunicazioni parti fredde con parti a temperatura ambiente.

Sulla testa del discendente sono fissati i passanti da vuoto che permettono il passaggio dei vari fili, un passante a tenuta da vuoto per l'asta di movimentazione del dissipatore e un passaggio che può essere usato sia come linea di pompaggio che come valvola di sicurezza in fase di estrazione.

In fig. 4.1 è rappresentata una sezione dello schermo principale assieme ai vari elementi che trovano posto al suo interno. Lo schermo è formato da due parti, il corpo principale e la flangia di tappo, entrambi in rame ricoperto in SnPb mediante elettrodeposizione (vedi appendice A). I due pezzi sono assemblati con un O-ring di SnPb che assicura la tenuta da vuoto e limita al minimo le fessure nella schermatura superconduttrice. La flangia di tappo, priva di fori di fissaggio, viene chiusa da una coppia di clamp di acciaio. La fessura che resta necessariamente tra tappo e scatola viene infine coperta con un foglio di SnPb per ridurre ulteriormente l'ingresso residuo di campo magnetico. In alternativa si è usato per la chiusura un O-ring di indio, materiale che si fa preferire allo SnPb per quanto riguarda la tenuta da vuoto in quanto mantiene un'elevata malleabilità anche a bassa temperatura; il fatto che l'indio non sia superconduttore a 4.2 K non

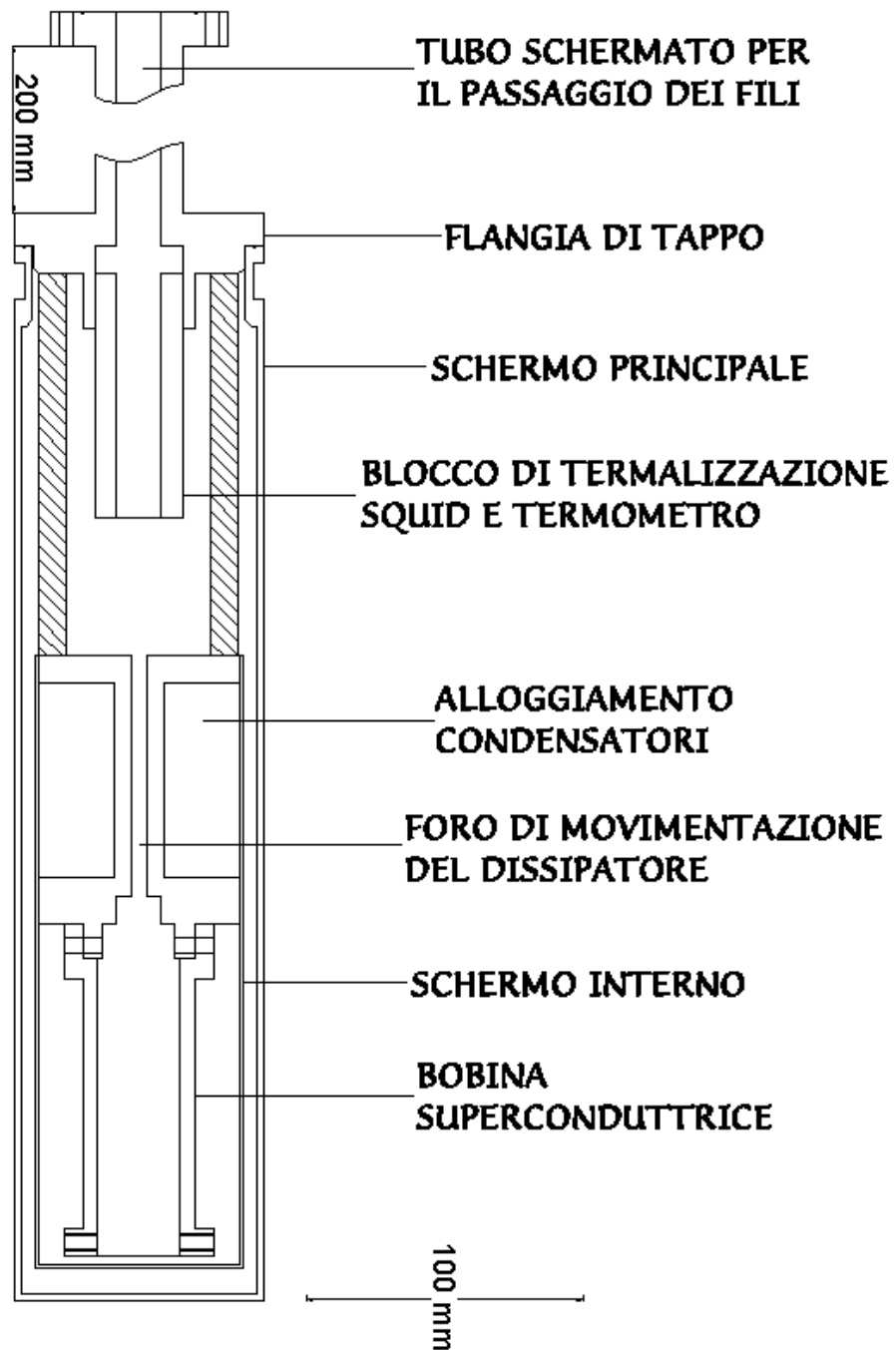
sembra aver peggiorato in modo sostanziale l'attenuazione complessiva dello schermo.

La parte alta della flangia di tappo è necessariamente aperta per permettere il passaggio dei fili elettrici che mettono in collegamento il sistema con il mondo esterno; per ridurre al minimo gli ingressi dei disturbi elettromagnetici la parte alta della flangia ha la forma di un collo di bottiglia dall'elevato rapporto lunghezza/raggio=25. Si può dimostrare infatti [12] che l'attenuazione di un campo magnetico all'interno di un tubo superconduttore aperto a un'estremità cresce con legge esponenziale rispetto al rapporto lunghezza/raggio. L'attenuazione complessiva dello schermo è stata misurata pari a  $10^{10}$  a frequenze maggiori di 0.1 Hz.

A un'appendice posta alla base inferiore della flangia di tappo sono agganciati tramite delle viti in ottone:

- 1) un anello più esterno, che fornisce il sostegno a quattro colonnine che a loro volta sostengono l'alloggiamento dell'oscillatore.
- 2) un pezzo in rame più interno, fissato alla flangia in modo da realizzare un buon contatto termico con la flangia stessa. Il pezzo costituisce il blocco di termalizzazione per lo SQUID e per un termometro che verrà descritto più avanti (paragrafo 4.5).

I due pezzi sono fissati alla flangia attraverso le medesime viti: per evitare che queste ultime “graffino” il film superconduttore di SnPb che ricopre la flangia, i fori di aggancio di quest'ultima sono stati protetti con dei fogli di mylar alluminato arrotolati.



**Figura 4.1:** *schema dell'apparato sperimentale*

## 4.2 Oscillatore

L'oscillatore LC è contenuto in una seconda e più interna scatola superconduttrice ricavata da un tubo di ottone ricoperto in SnPb. La scatola non è a tenuta da vuoto in quanto è chiusa semplicemente con delle viti all'estremità superiore del blocco in rame piombato che costituisce l'alloggiamento dei condensatori. Quest'ultimo ha una forma a doppio fungo che permette da un lato di isolare l'oscillatore LC dalla zona soprastante completando lo schermaggio della scatola interna, dall'altro di separare la zona dei condensatori dalla zona della bobina superconduttrice; questo particolare è di fondamentale importanza per ottenere Q elevati in quanto impedisce alla bobina di "vedere" le parti metalliche dei condensatori che altrimenti dissiperebbero per correnti parassite. Sull'asse del pezzo di sostegno dei condensatori è praticato un foro centrale che permette il passaggio del dissipatore che verrà descritto più avanti. Anche questo foro è ricoperto in SnPb e ha un rapporto lunghezza/raggio maggiore di 20.

La bobina superconduttrice viene alloggiata nella parte inferiore della scatola che viene così ad essere magneticamente isolata. Il supporto della bobina è fissato al pezzo superiore con delle viti di plastica. La bobina è stata realizzata avvolgendo circa un chilometro di filo di NbTi ricoperto in formvar<sup>1</sup> su un supporto cilindrico di teflon. La lunghezza effettiva della bobina è di 90 mm, i diametri interno ed esterno rispettivamente 40 mm e 52 mm. Il diametro totale del filo è 100  $\mu\text{m}$ , dei quali 75  $\mu\text{m}$  sono di NbTi e 25  $\mu\text{m}$  di formvar isolante. Il filo è stato avvolto con un passo spira-spira di 200  $\mu\text{m}$  su un totale di 17 strati e 7042 spire. Gli strati sono separati l'uno dall'altro da due avvolgimenti di nastro di teflon da 100  $\mu\text{m}$  intervallati da un foglio di teflon di 100  $\mu\text{m}$ ; la spaziatura totale di  $\sim 300 \mu\text{m}$  fra uno strato e

---

<sup>1</sup> Supercon, inc.

l'altro serve per diminuire la capacità parassita della bobina e quindi le dissipazioni della stessa. L'induttanza della bobina all'interno dello schermo superconduttore nel quale è alloggiata (che produce un effetto di schermaggio abbassando l'induttanza effettiva) è stata misurata pari a  $L=(0.554\pm 0.005)H$ . L'area efficace della bobina rispetto a un campo magnetico assiale si può calcolare come la somma delle aree di tutte le spire ed è data approssimativamente da  $A_{eff}\approx 13\text{ m}^2$ .

La capacità principale dell'oscillatore è costituita da condensatori al teflon commerciali<sup>2</sup>. I condensatori hanno una struttura in alluminio, e sono stati quindi separati dalla zona della bobina per non peggiorare il fattore di qualità.

Le fonti di dissipazione interne all'oscillatore sono di due tipi:

- 1) dissipazioni dovute a correnti di conduzione o a correnti parassite indotte dal campo magnetico oscillante della bobina.
- 2) dissipazioni dielettriche, dovute ai materiali isolanti nei condensatori e nella bobina.

L'esperienza mostra [13][14] che in un oscillatore LC così costruito, racchiuso in uno schermo superconduttore, il fattore di qualità dell'oscillatore è limitato essenzialmente dalle dissipazioni dielettriche nei condensatori: il materiale che offre le prestazioni migliori in tal senso è il teflon (PTFE), che permette di ottenere fattori di qualità a frequenze dell'ordine di kHz superiori a  $10^6$ .

---

<sup>2</sup> EuroFarad



### 4.3 Dissipatore

Il dissipatore è un dispositivo in grado di variare il fattore di qualità dell'oscillatore in ambiente criogenico. L'elemento dissipante è un cilindro conduttore di rame lungo 15 mm e con diametro 2 mm che può essere movimentato lungo l'asse della bobina grazie a un passante di movimento che sfrutta il foro schermato ricavato nel centro del blocco di sostegno dei condensatori. Il dissipatore può essere spostato dall'interno del foro, dove è completamente schermato, fino al centro della bobina, dove la dissipazione delle correnti parassite è massima.

Il passante di movimento è realizzato in due parti:

- 1) un'asta in PVC per la parte all'interno della scatola schermata; l'asta è in plastica perché deve portata nei pressi della bobina e deve quindi essere amagnetica e non conduttrice per evitare fenomeni dissipativi collaterali. Il cilindro dissipatore è inserito in un foro ricavato nella base inferiore dell'asta e fissato da una vite di plastica.
- 2) un'asta in acciaio inox per la parte superiore, che arriva fino alla testa del discendente e quindi a temperatura ambiente; qui l'asta esce dal discendente attraverso un o-ring di gomma che mantiene la tenuta da vuoto: diventa quindi possibile azionare manualmente l'intero passante di movimento agendo sull'estremità superiore dell'asta. La corsa dell'asta ha una regolazione di circa 15 cm ed è calibrata in modo che il dissipatore sia circa al centro della bobina nel punto più basso e totalmente inserito nel foro schermato nel punto più alto.

La geometria e le dimensioni del dissipatore sono state scelte in modo da poter prevedere in base ai calcoli riportati in appendice B un fattore di qualità minimo dell'ordine di  $10^4$ .

In fig. 6.4 è riportata la curva di calibrazione del fattore di qualità in funzione dell'altezza del del dissipatore. Si può notare che la zona di regolazione effettiva è circa 10 mm, cioè dell'ordine della lunghezza del dissipatore.

Osserviamo che mentre a basso Q la dissipazione avviene prevalentemente nel dissipatore, il limite superiore al fattore di qualità è dato dalle dissipazioni dielettriche dei materiali isolanti (teflon) dei condensatori.

#### 4.4 SQUID e accoppiamenti

Nelle misure è stato impiegato un dc SQUID commerciale Quantum Design, dello stesso tipo di quello attualmente in uso sul rivelatore AURIGA. Lo SQUID è realizzato su un chip sul quale sono integrate anche la bobina di ingresso e la bobina di feedback. Un trasformatore a nucleo ferromagnetico realizza il matching fra lo SQUID e il preamplificatore a temperatura ambiente che viene fissato direttamente alla testa del discendente. SQUID e trasformatore vengono racchiusi durante le misure all'interno di uno schermo cilindrico in niobio in dotazione allo SQUID.

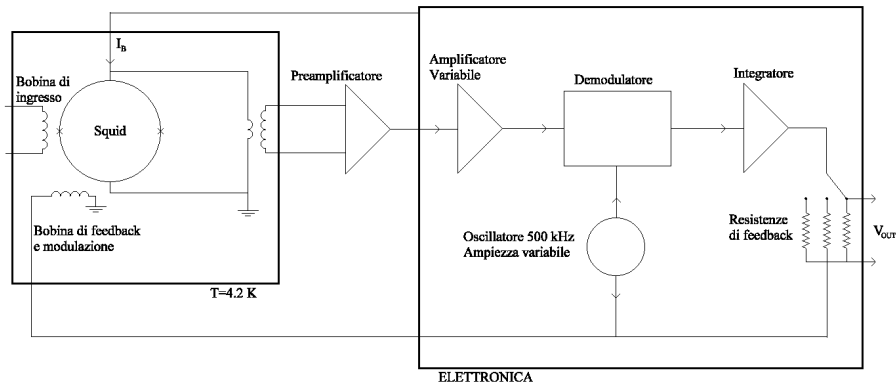
I fattori geometrici dichiarati dal costruttore sono:

$$L_I = 1.88 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

$$M_S = 1.11 \cdot 10^{-8} \text{ H}$$

dove  $L_I$  è l'induttanza della bobina di ingresso e  $M_S$  è la mutua induzione fra bobina di ingresso e SQUID loop.

L'elettronica di controllo viene fornita dal costruttore. Uno schema semplificato del funzionamento è rappresentato in fig. 4.2:



**Figura 4.2:** Schema dell'elettronica Quantum Design

E' possibile lavorare sia a loop aperto, aprendo lo switch sulla resistenza di feedback  $R_f$ , sia a loop chiuso con 3 diverse resistenze  $R_f$ , corrispondenti ad un range dinamico nominale di 5, 50 e 500  $\Phi_0$ . Nelle misure di rumore lo SQUID è sempre stato operato in range  $5\Phi_0$ , che è il più sensibile.

Si possono inoltre regolare la corrente di bias, il guadagno dell'amplificatore e l'ampiezza del segnale di modulazione a 500 kHz. Un'opportuna procedura di tuning, automatica o manuale, permette di regolare la corrente di bias sul valore ottimo, cioè il valore che massimizza la funzione di trasferimento  $V_\Phi$  a loop aperto e minimizza l'energia di rumore.

Le variazioni "elettroniche" del guadagno che si ottengono agendo sull'ampiezza della modulazione o sull'amplificatore non dovrebbero in linea di principio influire sulle prestazioni intrinseche dello SQUID (in particolare sul rumore di back action), ma possono però avere i seguenti effetti:

- ◆ Modificare il matching fra SQUID ed elettronica; il rumore di quest'ultima può diventare non trascurabile o addirittura superiore a quello dello SQUID.

- ◆ Modificare lo slew-rate dell'elettronica: se il guadagno della rete di feedback è troppo basso lo SQUID potrebbe non comportarsi più linearmente in frequenza.
- ◆ Cambiare l'impedenza di ingresso effettiva dello SQUID attraverso un termine proporzionale alla mutua induzione parassita fra bobina di feedback e bobina di ingresso [11].

E' necessario considerare questi effetti qualora le condizioni sperimentali impongano di lavorare a bassi guadagni, come è di fatto accaduto accoppiando fortemente lo SQUID all'oscillatore ad alto Q.

Sono state usate due diverse elettroniche, mod. 550 e mod. 5000, nominalmente uguali dal punto di vista circuitale, che si differenziano per il fatto che il mod. 550 permette un range di regolazione più ampio sui diversi parametri anche se non dispone di un'interfaccia digitale. Per le misure ad alto accoppiamento è stata usata sempre l'elettronica mod. 550.

La generica configurazione dell'elettronica può essere descritta attraverso le uscite analogiche in tensione (con uscita compresa fra 0 e 5V) associate rispettivamente al livello della corrente di bias (BIAS) e all'ampiezza del segnale di modulazione (MOD). Non esistendo nell'elettronica Quantum Design un'analogica uscita per il guadagno dell'amplificatore variabile si è usata come ulteriore coordinata  $G_{pp}$ , definita come l'ampiezza picco-picco, misurata in Volt, della caratteristica  $V-\phi$  dello SQUID all'uscita della catena di amplificazione a loop aperto. E' evidente che fissate BIAS e MOD il guadagno dell'amplificatore variabile è proporzionale a  $G_{pp}$ .  $G_{pp}$  è facilmente misurabile inviando allo SQUID un segnale di test, che ha un'ampiezza di alcuni quanti di flusso. Con queste convenzioni la configurazione dell'elettronica dovrebbe essere riproducibile.

L'accoppiamento fra SQUID e oscillatore è stato realizzato attraverso un trasformatore superconduttore costituito dalla bobina di ingresso e da un

pick-up di induttanza  $L_P$  realizzato in modo diverso a seconda dell'accoppiamento  $k$  cercato. Per bassi accoppiamenti si è fatto uso di pick-up piccoli a giro unico avvolti su un supporto di PVC fissato con viti di plastica all'interno della bobina lungo l'asse della bobina stessa. Per alti accoppiamenti si è invece avvolto il pick-up direttamente sulla bobina, o sovrapponendo le spire in un'unica posizione o distribuendo le spire ad elica su tutta la bobina in modo da massimizzare l'accoppiamento. In tabella 4.1 sono riassunte le caratteristiche dei vari pick-up utilizzati:

| Diametro e tipo di pick-up  | posizione ( mm ) | k     | $L_P$ ( H )         |
|-----------------------------|------------------|-------|---------------------|
| $f=4$ mm, 1 giro            | 10               | 0.005 | $1.1 \cdot 10^{-8}$ |
| $f=8$ mm, 1 giro            | 25               | 0.02  | $2.5 \cdot 10^{-8}$ |
| $f=52$ mm, 3 giri su bobina | 1                | 0.15  | $2.0 \cdot 10^{-6}$ |
| $f=52$ mm, 8 giri su bobina | distribuita      | 0.56  | $1.8 \cdot 10^{-6}$ |

**Tabella 4.1:** caratteristiche dei pick-up utilizzati. La posizione indica la distanza dall'estremità inferiore della bobina. Le misure di  $k$  e  $L_P$  sono state ottenute in fase di calibrazione.

Il filo di niobio in uscita dal pick-up viene portato allo SQUID dopo essere stato accuratamente intrecciato per evitare di aprire dei loop parassiti e inserito in un tubo di SnPb superconduttore. Il contatto elettrico superconduttore con la bobina di ingresso dello SQUID viene effettuato stringendo le estremità del pick-up fra due rondelle di niobio pressate da una vite, poste in contatto elettrico superconduttore con la bobina di ingresso.

## 4.5 Criostato, attenuazione delle vibrazioni e termometria

Il criostato<sup>3</sup> nel quale si sono svolte le misure ha una capacità massima di 60 litri. Il sistema completo criostato-dewar è sostenuto da una struttura sospesa su ammortizzatori pneumatici attivi, integrati da un sistema di soffiotti lamellari che attenua le vibrazioni introdotte dalla linea di pompaggio<sup>4</sup>. Quest'ultima ha un diametro di 50 mm, ed è stata usata nel corso dell'esperimento per abbassare la temperatura del bagno di elio fino alla temperatura minima di 1.25 K.

Integrato nel criostato è presente uno schermo magnetico in  $\mu$ -metal che produce nella parte bassa del dewar, dove è situato l'apparato sperimentale, un'attenuazione dei campi magnetici ambientali di un fattore dell'ordine di 100.

Questo schermaggio limita il campo magnetico DC che viene intrappolato sotto forma di flussoni nello schermo principale al momento della transizione superconduttrice. Tale campo rimane praticamente congelato, e non contribuisce pertanto in maniera diretta al rumore magnetico, ma determina piuttosto la sensibilità dell'oscillatore come trasduttore di rumore acustico-vibrazionale. Per essere certi di ottenere la massima attenuazione del campo magnetico DC al momento della transizione si è cercato quando possibile di inserire l'apparato nel fondo del dewar prima di effettuare il riempimento con elio liquido.

La termalizzazione delle varie parti dell'apparato con il bagno di elio viene ottenuta sia attraverso la struttura interna che è prevalentemente in rame sia attraverso il gas elio residuo che è racchiuso nella scatola. Durante la fase di raffreddamento viene immessa una pressione di  $\sim 100$  mbar di He gas

---

<sup>3</sup> Precision Cryogenics Systems

<sup>4</sup> Il sistema è stato realizzato da M.Bonaldi e R.Dolesi nel corso di esperimenti svolti sullo SQUID a HeII.

a temperatura ambiente, che successivamente viene pompata fino a meno di 1 mbar per limitare la propagazione di rumore acustico. Lo SQUID viene termalizzato sull'apposito blocco di rame che è in buon contatto termico con la flangia di tappo. Sullo stesso blocco è installato un termometro calibrato al germanio che permette di monitorare la temperatura dell'interno della scatola e di verificare l'efficienza delle termalizzazioni, in particolare dello SQUID. Il termometro è fissato in un morsa di rame per garantire un buon contatto termico. I fili elettrici che provengono dall'alto vengono a loro volta termalizzati prima di arrivare al termometro su un cilindretto di rame. La valutazione della temperatura viene effettuata misurando la resistenza del chip di germanio con una misura a quattro fili e confrontandone il valore con la curva di calibrazione temperatura-resistenza fornita dal costruttore. L'incertezza sulla misura di temperatura è dall'ordine di 0.2%.

Per caratterizzare il rumore termico dell'oscillatore (vedi cap.6.1.2) sono state effettuate misure in un range di temperatura compreso fra 1.25 K e 4.2 K; le temperature inferiori a 4.2 K sono state ottenute pompando adiabaticamente sul bagno di elio. La stabilizzazione in temperatura è stata ottenuta in modo diverso a seconda del range temperatura-pressione in gioco. La maggior parte delle misure è stata fatta alla temperatura di 4.2 K, dove viene attuata una termoregolazione naturale dal recupero dell'elio che viene mantenuto costantemente al valore della pressione atmosferica; le fluttuazioni di temperatura indotte dalle fluttuazioni di quest'ultima sono trascurabili ai nostri scopi.

A 3 K è stato impiegato un loop di controreazione che misura la pressione sul bagno e la tiene costante entro 0.1 mbar modificando la velocità di pompaggio efficace attraverso l'immissione regolata da una valvola di gas elio sulla linea di pompaggio.

Sotto i 2.17 K, che corrispondono alla transizione  $\lambda$  dell'elio, è stato possibile regolare la velocità di pompaggio efficace in controreazione direttamente sulla temperatura di un carboresistor immerso nel bagno. Questo sistema, stabile al meglio di 1 mK, è applicabile solo con l'elio superfluido, dove i ritardi nella propagazione della temperatura sono trascurabili [15].

Il sistema di pompaggio è costituito da una pompa rotativa e da una pompa roots, che però viene azionata solo a pressioni inferiori a 10 mbar per raggiungere temperature inferiori a 1.6 K.



## 5 Metodi di misura

In questo capitolo verranno presentati i metodi di misura che sono stati impiegati nel corso dell'esperimento: nel paragrafo 5.1 sono descritte la procedura di filtraggio basata sull'uso di un lock-in e la procedura statistica di analisi dei dati che sono state usate per misurare il rumore dell'oscillatore; nel paragrafo 5.2 è descritto il metodo di misura di fattore di qualità e frequenza di risonanza basato sull'analisi del decadimento libero dell'oscillatore; nel paragrafo 5.3 sono descritte la procedura di calibrazione delle misure di rumore e le misure dei parametri circuitali; il paragrafo 5.4 infine è dedicato alla misura del rumore a banda larga all'uscita dello SQUID.

### 5.1 Misura del rumore dell'oscillatore

Il segnale in uscita dallo SQUID è la somma del rumore a spettro lorentziano proveniente dall'oscillatore e del rumore a banda larga aggiunto dallo SQUID in uscita con spettro di potenza  $S_V=A^2S_i$ . Si è cercato di rendere molto piccolo se non trascurabile il contributo del rumore a banda larga sottoponendo il segnale a un opportuno procedimento di filtraggio.

A tale scopo il segnale viene inviato a un amplificatore lock-in digitale<sup>1</sup>, caratterizzato dalla frequenza di reference  $\omega_{lk}$  e dalla costante di tempo  $\tau_{lk}$  del filtro in uscita. Il segnale di reference è una sinusoide prodotta da un generatore di forme d'onda<sup>2</sup>. La frequenza  $\omega_{lk}$  viene sintonizzata sulla frequenza di risonanza  $\omega_0$  con una precisione di  $\pm 0.5$  mHz durante il

---

<sup>1</sup> Modello SR830, Stanford Research

decadimento libero dell'oscillatore attraverso la procedura descritta nel paragrafo 5.2.

L'uscita del lock-in è costituita dalle due fasi X e Y, che rappresentano rispettivamente le componenti del segnale “in fase” e “in quadratura” rispetto al segnale di reference, oppure in coordinate polari da ampiezza  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  e sfasamento  $\phi = \arg(Y/X)$ .

Si dimostra ( vedi appendice C ) che l'ampiezza quadratica media del segnale all'uscita del lock-in, nell'ipotesi:

$$|\omega_{lk} - \omega_0| \ll \frac{1}{\tau_{lk}} \quad (5.1)$$

è data da:

$$\langle R^2 \rangle = \sigma^2 \frac{\tau}{\tau + \tau_{lk}} + \sigma_s^2 \quad (5.2)$$

dove  $\tau$  è la costante di tempo dell'oscillatore e  $\sigma^2$  è la varianza della parte “lorenziana” del rumore, che è data in base alle eq. (3.20) dalla somma delle 3 componenti, rispettivamente termica, in flusso e di back action:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= K^2 \frac{k_B T}{L_{eq}} \frac{Q}{Q_{int}} \\ \sigma_\Phi^2 &= K^2 \frac{S_F}{2\omega_0 L_{eq}^2} Q \\ \sigma_{Back}^2 &= K^2 \left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^2 \frac{S_e}{2\omega_0 L_{eq}^2} Q \end{aligned} \quad (5.3)$$

con  $K = AM/(L_I + L_P)$ , mentre  $\sigma_s^2$  è il contributo del rumore a banda larga dello SQUID che è dato (vedi appendice C) da:

$$\sigma_s^2 = \frac{S_V}{\tau_{lk}} = \frac{A^2 S_i}{\tau_{lk}} \quad (5.4)$$

---

<sup>2</sup> Modello DS345, Stanford Research

La varianza del rumore dell'oscillatore può essere quindi determinata da una misura sperimentale di  $\langle R^2 \rangle$  come:

$$\sigma^2 = \frac{\tau + \tau_{lk}}{\tau} (\langle R^2 \rangle - \sigma_s^2) \quad (5.5)$$

L'equazione (5.5) indica che è conveniente se possibile scegliere la costante di tempo del lock-in sufficientemente grande da rendere trascurabile il contributo dello SQUID e sufficientemente piccola da soddisfare la condizione  $\tau \gg \tau_{lk}$  cioè da rendere trascurabile l'effetto di taglio del filtro in uscita del lock-in. In queste condizioni si ha semplicemente:

$$\sigma^2 = \langle R^2 \rangle \quad (5.6)$$

Ci si attende che le due fasi X e Y del lock-in abbiano una distribuzione statistica gaussiana, poiché tutti i rumori in ingresso possono essere ricondotti in ultima analisi a rumore gaussiano. In questa ipotesi è facile dimostrare che la grandezza  $R^2$  deve distribuirsi esponenzialmente con una densità di probabilità:

$$P(R^2) = \frac{1}{\langle R^2 \rangle} e^{-\frac{R^2}{\langle R^2 \rangle}} \quad (5.7)$$

Tale relazione ha una semplice interpretazione energetica se si considera il caso particolare il cui è presente il solo rumore termico e gli altri contributi sono trascurabili. La (5.7) si riduce allora alla distribuzione di Boltzmann applicata al grado di libertà macroscopico dell'oscillatore:

$$P(I^2) \propto e^{-\frac{LI^2}{k_B T}} \quad (5.8)$$

Per determinare sperimentalmente il parametro  $\langle R^2 \rangle$ , si è quindi applicata la seguente procedura:

- 1) Campionamento tramite calcolatore<sup>3</sup> a intervalli regolari delle fasi X e Y del lock-in. Per poter considerare scorrelati fra loro i punti campionati si è scelto un tempo di campionamento pari a  $2\tau$ .
- 2) Calcolo di  $R^2=X^2+Y^2$  sui punti campionati e eventuale operazione di “filtraggio” di eventi di extranoise (vedi cap.6.1.2).
- 3) Costruzione dell’istogramma del numero di campioni caduti in determinati intervalli della variabile  $R^2$ .
- 4) Fit esponenziale dell’istogramma pesato su  $1/\sqrt{N}$  dove con N si indica il numero di punti campionati in cui  $R^2$  cade in un determinato intervallo. Tale metodo è molto efficace poiché valuta globalmente la forma della distribuzione; inoltre si rivela intrinsecamente poco sensibile all’extranoise in quanto eventi di alta energia ma rari sono pesati poco. Una stima di  $\langle R^2 \rangle$  come semplice media sarebbe al contrario particolarmente sensibile proprio all’extranoise.

## 5.2 Misura di fattore di qualità e frequenza di risonanza

Il fattore di qualità e la frequenza di risonanza vengono determinati simultaneamente eccitando l’oscillatore e studiandone il decadimento libero in una regione in cui l’ampiezza è sufficientemente alta da non essere apprezzabilmente influenzata dal rumore.

L’eccitazione viene effettuata collegando il criostato (che è a massa) con un generatore di segnali attraverso il capo caldo di un cavo coassiale: si invia quindi al criostato un segnale relativamente forte dell’ordine di 1 Volt alla frequenza di risonanza eccitando l’oscillatore grazie all’accoppiamento

---

<sup>3</sup> Il lock-in è interfacciato a un PC: il programma di acquisizione è stato realizzato in ambiente QuickBasic da R.Mezzena.

residuo di quest'ultimo con le pareti del criostato e con il cavo dello SQUID. Si è trovato che il fattore di qualità è sufficientemente elevato da amplificare il segnale fino a eccitare l'oscillatore a un'ampiezza 5-6 ordini di grandezza sopra il livello del rumore.

Durante il decadimento il segnale in uscita dallo SQUID viene inviato al lock-in e si campionano l'ampiezza  $R$  e la fase  $\phi$  rispetto al segnale di reference prodotto dal generatore di segnali<sup>4</sup>. Le costanti di tempo del lock-in  $\tau_{lk}$  e di campionamento  $\tau_{camp}$  sono sempre state scelte in modo da soddisfare la condizione  $\tau \gg \tau_{camp} > \tau_{lk}$ .

È immediato dimostrare che la velocità di deriva della fase è proporzionale alla differenza fra la frequenza di oscillazione e la frequenza di reference:

$$\dot{\phi} \left( \frac{\text{deg}}{\text{s}} \right) = \frac{\nu_0 - \nu_{REF}}{360} \quad (5.9)$$

La frequenza di risonanza viene quindi determinata per mezzo di un fit lineare della fase in funzione del tempo (fig. 5.1).

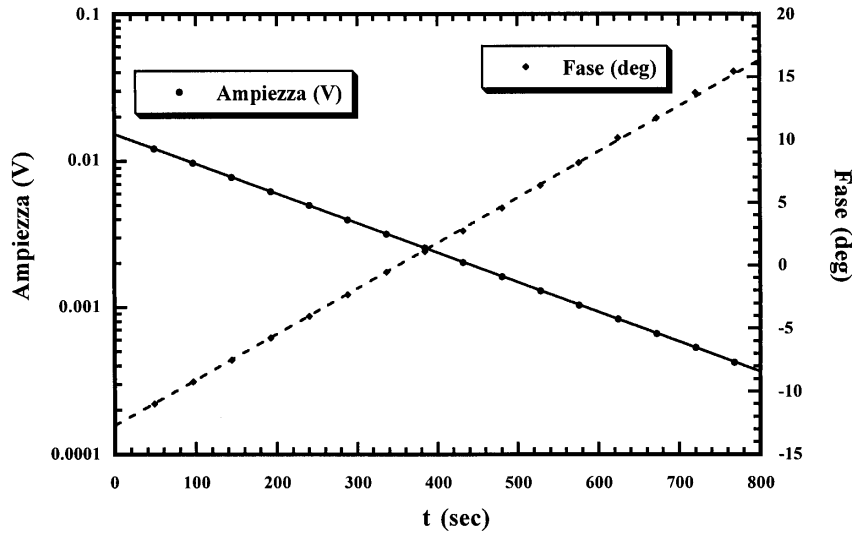
Come operazione preliminare per le misure di rumore si può quindi riaggiustare la frequenza di reference sulla frequenza di risonanza con un'approssimazione di  $\pm 0.5$  mHz, che è la risoluzione del generatore di segnali. Al termine di ogni acquisizione di rumore si verifica con una ripetizione della procedura appena descritta che le derive in frequenza dell'oscillatore siano state trascurabili.

Per valutare il fattore di qualità si graficano invece i valori campionati durante il decadimento dell'ampiezza  $R$  all'uscita del lock-in e si determina la costante di tempo dell'oscillatore con un fit esponenziale (fig. 5.3). Si risale quindi al fattore di qualità usando la relazione  $Q = \pi \nu_0 \tau$ . Anche

---

<sup>4</sup> Vedi nota 3

questa misura viene ripetuta prima e dopo la misura di rumore per verificare l'assenza di drift.



**Figura 5.3:** Esempio di acquisizione con lock-in del decadimento dell'oscillatore: da un fit lineare della fase in funzione del tempo si ricava la frequenza, da un fit esponenziale dell'ampiezza si ricava la costante di tempo  $\tau$  e quindi il fattore di qualità  $Q$ .

Osserviamo che con questa procedura si determina il  $Q$  effettivo del circuito, che tiene conto anche dell'impedenza dinamica di ingresso dello SQUID. Il fattore di qualità intrinseco  $Q_{int}$  é uguale al  $Q$  in condizioni di accoppiamento molto basso, condizioni che sono state quindi scelte per la caratterizzazione del rumore termico e in flusso e che hanno permesso di calibrare il  $Q_{int}$  in funzione dell'altezza del dissipatore.

### 5.3 Misura di calibrazione

Per calibrare le misure di rumore, cioè risalire dalla tensione in uscita alla corrispondente corrente nella bobina o all'ingresso dello SQUID, è necessario conoscere la costante di calibrazione  $K$  che compare nelle (5.3)::

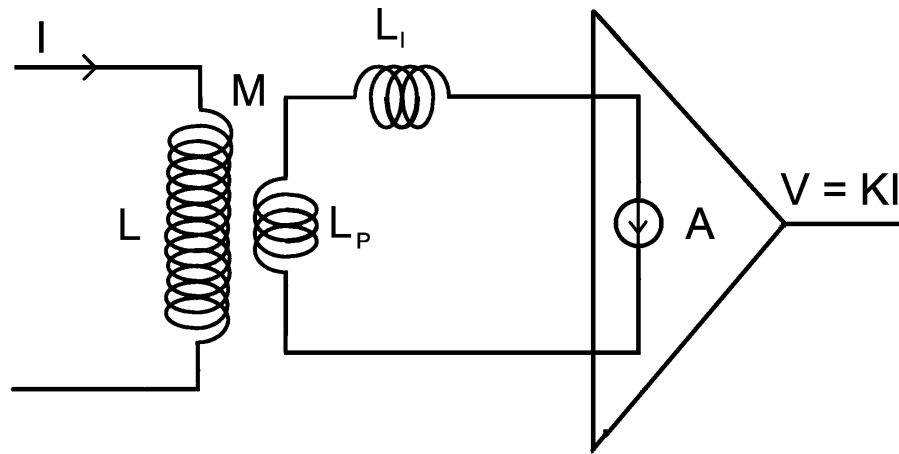
$$K = A \frac{M}{L_1 + L_p} = M_s G \frac{M}{L_1 + L_p} \quad (5.10)$$

dove  $G$  è la funzione di trasferimento flusso-tensione dello SQUID all'uscita dell'elettronica.

Per ridurre i possibili ingressi diretti di interferenze elettromagnetiche si è deciso di non accoppiare induttivamente l'oscillatore a una bobina di calibrazione collegata a una linea esterna. La costante  $K$  è stata quindi misurata mediante un apposito run di calibrazione in cui si è collegato direttamente alla bobina un cavo coassiale ed è stata scollegata la capacità principale ( fig.5.2).

In questa configurazione, inviando alla bobina tramite il generatore di forme d'onda una corrente  $I$  nota, si ottiene in uscita una tensione che è il prodotto di tre funzioni di trasferimento: la mutua induzione  $M$  tra pick-up e bobina (flusso al pick-up / corrente alla bobina), il rapporto di trasformazione in flusso del trasformatore superconduttore (flusso allo SQUID / flusso al pick-up) che è dato da  $T = M_s / (L_1 + L_p)$  e il guadagno  $G$  dello SQUID visto come misuratore di flusso. Il prodotto di queste funzioni di trasferimento fornisce esattamente la costante di calibrazione  $K$ .

$$V = (MTG)I = KI \quad (5.11)$$



**Figura 5.4:** Schema circuitale impiegato per la misura di calibrazione.

$G$  può essere peraltro misurato indipendentemente usando la seguente tecnica: si invia alla bobina una corrente sinusoidale tale che allo SQUID venga applicato un flusso ac di ampiezza  $\Phi_0$  (oppure  $n\Phi_0$  con  $n$  intero), condizione che si identifica facilmente osservando l'uscita a loop aperto e avendo cura che i punti di inversione del flusso ac esterno corrispondano alla stessa tensione in uscita; si chiude quindi il loop e si misura l'ampiezza  $V$  del segnale. Essendo lo SQUID operato a loop chiuso un dispositivo lineare la funzione di trasferimento è semplicemente:

$$G = \frac{\partial V}{\partial \Phi} = \frac{V}{\Phi_0} \quad (5.12)$$

L'incertezza su questa misura si può valutare dell'ordine di 1% , ed è legata essenzialmente all'accuratezza con cui si riesce a riprodurre un singolo quanto di flusso in ingresso.

Noti  $K, G$  ed essendo  $M_s$  un parametro geometrico noto si può ricavare dall'equazione (5.10) il fattore  $M/(L_1 + L_p)$  che entra esplicitamente nel termine di back action delle (5.3).



Il run di calibrazione può essere sfruttato anche per misurare l'induttanza equivalente  $L_{eq}$  della bobina accoppiata al trasformatore. Questo può essere fatto sia misurando direttamente l'induttanza con tecniche standard di misura di impedenza, sia misurando la capacità  $C$  e sfruttando la relazione di risonanza:

$$(2\pi\nu_0)^2 = \frac{1}{L_{eq}C} \quad (5.13)$$

La misura di capacità è stata preferita perché può essere fatta direttamente mediante misura di tempo di carica usando un tester capacitivo e si possono valutare più facilmente gli effetti della capacità parassita dei cavi di collegamento. La capacità viene collegata all'esterno attraverso un secondo cavo coassiale la cui capacità, misurata in  $C'=0.2$  nF con il cavo scollegato, viene sottratta dalla capacità totale. L'errore su questa misura è stata valutata dell'ordine del 0.5 %. Va precisato che la capacità dei condensatori al teflon ha subito dei leggeri drift verso il basso da un raffreddamento all'altro dell'ordine dello 0.3 % per raffreddamento; si è quindi controllato volta per volta che il drift fosse inferiore all'errore sulla misura di capacità.

A basso accoppiamento si ha  $L_{eq} \approx L$  e quindi è stato possibile misurare l'induttanza intrinseca della bobina disaccoppiata all'interno dello schermo superconduttore  $L = (0.554 \pm 0.005)$  H

È interessante infine anche se non necessario avere una stima dell'accoppiamento  $k$  fra bobina e pick-up. Questa si può ottenere, se è nota indipendentemente l'induttanza del pick-up  $L_p$ , dalla relazione:

$$k^2 = \left( \frac{M}{L_I + L_p} \right)^2 \frac{(L_I + L_p)^2}{LL_p} = K^2 \frac{(L_I + L_p)^2}{LL_p} \quad (5.14)$$

L'induttanza  $L_p$  è stata stimata in due modi diversi. Per i pick-up circolari si è fatto uso della nota formula approssimata:

$$L_P = N^2 \mu_0 r \left( \ln \left( \frac{8r}{r_0} \right) - 1.75 \right) \quad (5.15)$$

valida per avvolgimenti circolari di raggio  $r$ , raggio del filo  $r_0$  e numero di spire  $N$ .

Per il pick-up distribuito che è stato usato per ottenere l'accoppiamento più elevato è stata fatta una misura diretta a caldo con un LCR-meter<sup>5</sup> su una bobina in rame costruita su identico supporto, con le stesse dimensioni e inserita nello stesso schermo. La misura è ovviamente molto grossolana, ma permette comunque di avere una buona stima di  $k$  se  $L_P \sim L_I$  in quanto la funzione (5.14) ha un massimo in questa zona ed è quindi poco sensibile a variazioni di  $L_P$ .

## 5.4 Misura del rumore a banda larga

La misura dello spettro del rumore a banda larga all'uscita dello SQUID  $S_V$  è importante sia per stimarne il contributo nelle misure di rumore dell'oscillatore, sia per poter determinare il valore di  $\xi$  dell'equazione (2.14) che va messo in relazione con il rumore di back action  $S_e$ .

Si sono utilizzati a tale scopo due analizzatori di spettro diversi, che hanno però fornito sostanzialmente gli stessi risultati: il primo è un analizzatore di spettro integrato HP35660A, il secondo un acquisitore Keythley 500A controllato via software<sup>6</sup>. Gli spettri ottenuti (fig. 6.5) risultano dalla sovrapposizione del rumore a banda larga, del picco di risonanza dell'oscillatore e di altri picchi minori corrispondenti per lo più a risonanze meccaniche a bassa frequenza.

---

<sup>5</sup> Modello HP4284A

<sup>6</sup> Il software di controllo è stato realizzato da Giorgio Fontana.

Si è misurato il livello dello spettro di potenza in una banda di frequenza di qualche centinaio di Hz attorno alla risonanza stessa, in zone prive di rumore vibrazionale. La precisione della misura è stata valutata dell'ordine del 10%. Si è quindi verificato che il rumore a banda larga è effettivamente bianco nelle frequenze di interesse, ipotesi che permette di valutarne il contributo anche alla frequenza di risonanza.

La misura del rumore a banda larga ha inoltre permesso di testare in via preliminare il metodo di misura del rumore dell'oscillatore descritto nel paragrafo 5.1: si è infatti applicata la medesima procedura di campionamento con lock-in e di analisi statistica in un punto "pulito" fuori risonanza, e si è valutato dalla relazione (5.4) con  $\sigma^2=0$  il livello dello spettro di potenza bianco corrispondente. I valori di  $S_V$  così ottenuti coincidono entro le incertezze con i valori misurati con l'analizzatore di spettro.



## 6 Risultati sperimentali

Riassumiamo brevemente la strategia generale che è stata seguita nel corso dell'esperimento. Inizialmente è stata effettuata una serie di test con lo SQUID debolmente accoppiato all'oscillatore; tali misure, che sono presentate nel paragrafo 6.1 e hanno avuto lo scopo di caratterizzare il rumore termico dell'oscillatore e di permettere l'identificazione e riduzione delle principali sorgenti di rumore in flusso alla bobina; si è perciò mantenuto un basso accoppiamento in modo da evitare gli effetti dell'impedenza d'ingresso dello SQUID e il rumore di back action e poter considerare così l'oscillatore sostanzialmente disaccoppiato, semplificando notevolmente l'interpretazione dei dati. Nel paragrafo 6.1.1 viene presentato il primo test effettuato a bassa frequenza (266 Hz) e alla temperatura di 4.2 K, che ha subito evidenziato un rumore molto superiore alle aspettative e una resistenza d'ingresso dello SQUID non trascurabile. Si è quindi passati a un secondo test descritto nel paragrafo 6.1.2 a frequenza diversa (927 Hz) e ad accoppiamento minore. Qui sono stati variati sia il fattore di qualità che la temperatura. Nel paragrafo 6.1.3 verranno discussi i principali risultati ottenuti in particolare il livello di isolamento elettromagnetico-vibrazionale raggiunto e il rumore termico.

Dopo che i primi test a basso accoppiamento hanno fornito i risultati sperati, cioè hanno dimostrato che il sistema è "termico" e che gli effetti del rumore in flusso sono trascurabili in condizioni sperimentali riproducibili, si è passati ad accoppiamenti più elevati nel tentativo di misurare il contributo di back action dello SQUID al rumore dell'oscillatore.

Nei paragrafi 6.2.1 e 6.2.2 sono presentati i risultati relativi ai due test effettuati, rispettivamente con  $k=0.15$  e  $k=0.56$ : in entrambi i casi si è misurato il rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità alla

temperatura di 4.2 K. Nel paragrafo 6.2.3 saranno discussi i risultati di queste ultime misure, in particolare i problemi legati alla stabilizzazione del sistema a forti accoppiamenti, la misura del rumore di back action dello SQUID e il confronto con le stime teoriche.

## 6.1 Misure a basso accoppiamento

### 6.1.1 Test con pick-up $k=0.02$ , $n_0=266$ Hz

Per questo primo test è stata scelta una capacità totale misurata a freddo di  $C=(640\pm 10)$  nF formata da 4 condensatori in parallelo con capacità nominale di 150 nF ciascuno. La frequenza di risonanza del risonatore è stata trovata poi a  $\nu_0=265.969$  Hz, con un valore stimato dell'induttanza dato da  $L\approx L_{eq}=(0.560\pm 0.008)$  H.

Il pick-up ha un diametro 8mm ed è posto quasi al centro della bobina. La misura di calibrazione ha fornito per gli accoppiamenti i seguenti valori:

$$K = (5.12 \pm 0.01) \cdot 10^6 \frac{V}{A}$$

$$G = (3.56 \pm 0.03) \cdot 10^6 \frac{V}{A}$$

$$\frac{M}{L_I + L_P} = 1.44 \pm 0.02$$

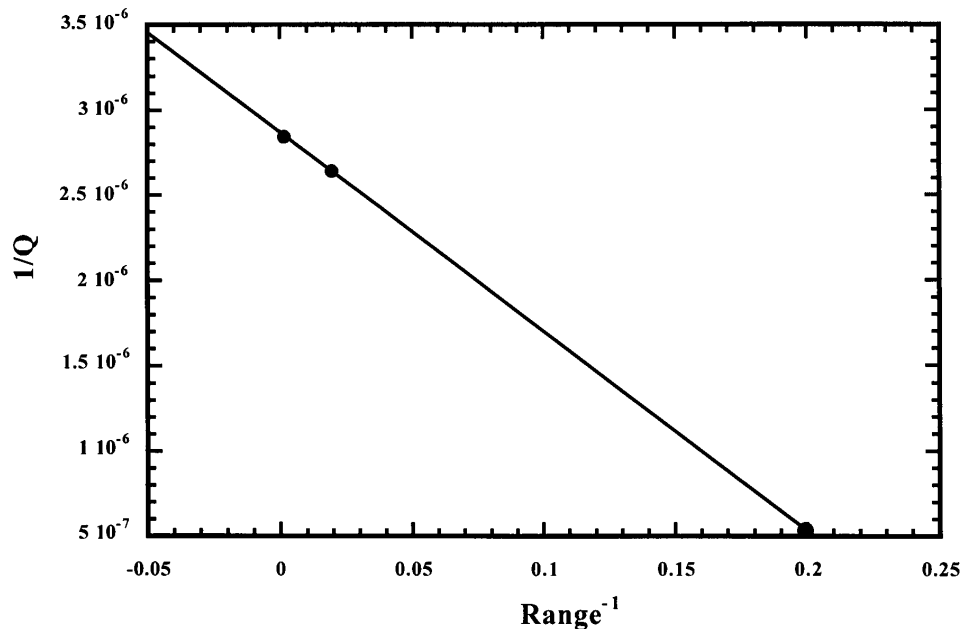
Dall'induttanza del pick-up stimata in  $L_P \sim 0.02$   $\mu$ H con la formula (5.15) è stato stimato con la (5.14) un accoppiamento fra bobina e pick-up  $k=0.02$ .

Il rumore termico atteso con questo valore degli accoppiamenti e dell'induttanza è dato in base alla prima delle (5.3) da  $\sigma_T^2 = (2.70 \pm 0.05) \cdot 10^{-9} V^2$ .

Si è trovato un effetto non trascurabile della parte reale dell'impedenza di ingresso dello SQUID sul fattore di qualità dell'oscillatore. La determinazione del fattore di qualità intrinseco dell'oscillatore ha quindi richiesto una particolare attenzione. A questo scopo il fattore di qualità è stato misurato in varie configurazioni dell'elettronica: impostando il range

dinamico a  $5,50,500 \phi_0$  cioè variando il guadagno a loop chiuso<sup>1</sup>, e a elettronica spenta.

Quest'ultima misura è stata effettuata eccitando l'oscillatore, spegnendo l'elettronica e riaccendendola dopo 2-3 costanti di tempo: il fattore di qualità può essere determinato campionando l'energia dell'oscillatore prima dello spegnimento e dopo la riaccensione e supponendo il decadimento esponenziale. Si deve supporre inoltre che le operazioni di spegnimento e riaccensione dell'elettronica non producano delle eccitazioni supplementari nell'oscillatore.



**Figura 6.1:** *Fattore di qualità dell'oscillatore in funzione del range<sup>-1</sup> dello SQUID, grandezza che è proporzionale al guadagno a loop chiuso.*

Un tipico risultato di queste misure è mostrato in fig.6.1, dove è graficato  $1/Q$  in funzione del guadagno a loop chiuso. Si è trovato in generale un andamento

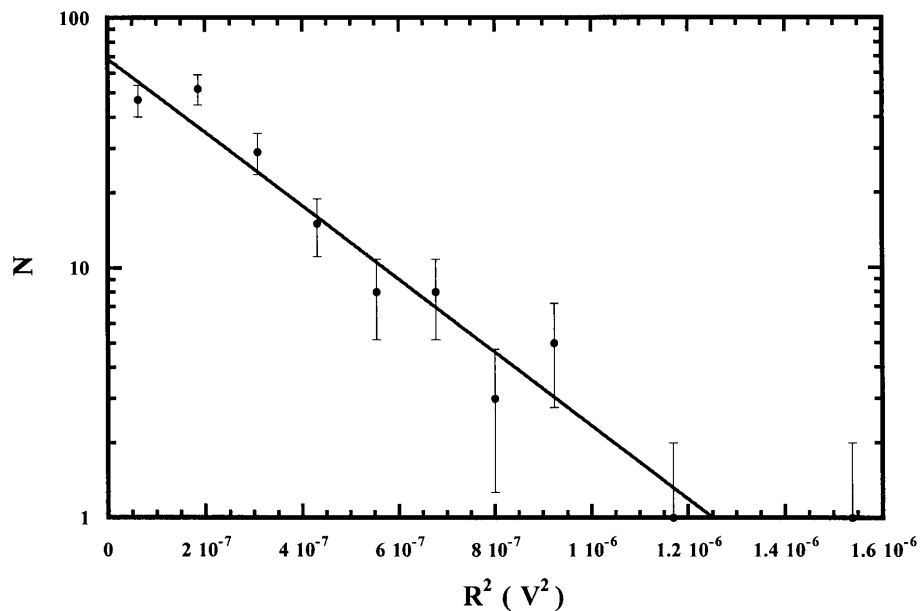
---

<sup>1</sup> E' facile constatare che il guadagno a loop chiuso dello SQUID è inversamente proporzionale al range dinamico.



lineare: nel limite in cui il guadagno a loop chiuso tende a zero e quindi il range dinamico tende a infinito il fattore di qualità tende al valore misurato a elettronica spenta. Questo valore è stato quindi assunto come il valore del fattore di qualità intrinseco.

Le misure ottenute variando il fattore di qualità per mettere in evidenza i contributi termico e in flusso al rumore dell'oscillatore sono riassunte in tabella 6.1.



**Figura 6.2:** Esempio di istogramma della variabile  $R^2$ . La linea rappresenta il best fit dei dati con la distribuzione esponenziale (5.8) con  $\langle R^2 \rangle$  come parametro.

Gli istogrammi sperimentali della variabile  $R^2$  hanno sempre mostrato un andamento in sufficiente accordo con la distribuzione esponenziale attesa (fig.6.2). E' stato possibile impostare per ogni acquisizione un valore della costante di tempo del lock-in  $\tau_{lk}$  tale da soddisfare la (5.6). Lo spettro di

potenza all'uscita dello SQUID è stato infatti misurato in  $S_V=2 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2/\text{Hz}$ , e il suo contributo anche con  $\tau_{lk}=1 \text{ sec}$  è quindi pari a  $\sigma_s^2=2 \cdot 10^{-11} \text{ V}^2$ , quindi meno dell'incertezza sulle misure di rumore riportate in tab 6.1.

In base all'ipotesi di cold damping i dati sono stati normalizzati per il fattore  $Q_{int}/Q$ . Ci si attende allora dalle equazioni (5.3) che la varianza normalizzata sia costituita da due contributi, uno costante (il rumore termico) e l'altro proporzionale a  $Q_{int}$ . I dati sono stati quindi graficati in fig. 6.3 e interpolati con una funzione lineare  $y=a+bx$  pesata sugli errori. I valori dei parametri del fit e del  $\chi^2$  ridotto a 4 gradi di libertà sono dati rispettivamente da:

$$a = (2.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-9} \text{ V}^2$$

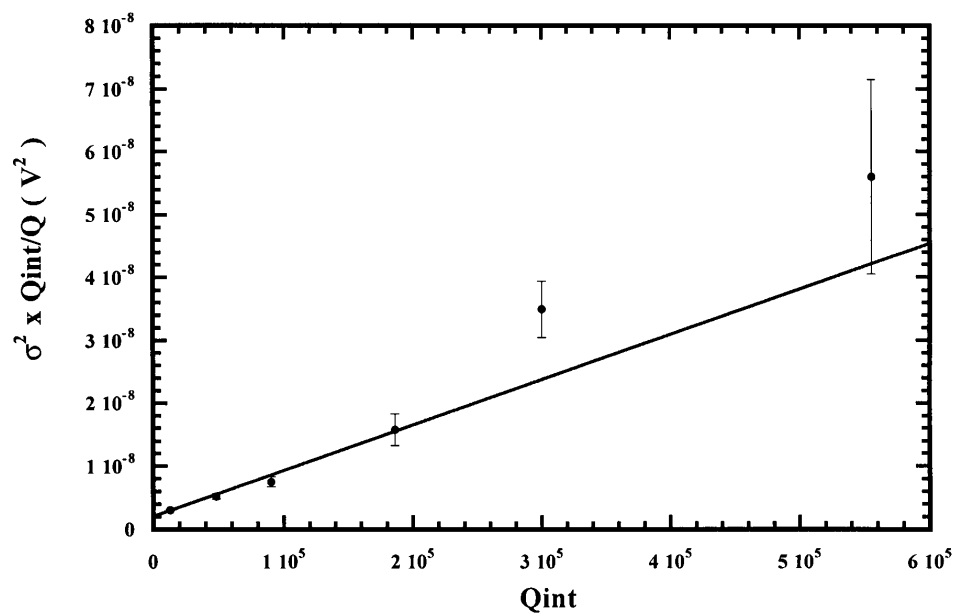
$$b = (7 \pm 1) \cdot 10^{-14} \text{ V}^2 \quad (\text{Fit 1})$$

$$\chi^2(4) = 2.0$$

Il valore del  $\chi^2$  è accettabile a un livello di confidenza di due deviazioni standard.

| $Q_{int}$ | $Q$    | $\sigma^2 (\text{V}^2)$       | $\sigma^2 Q_{int}/Q (\text{V}^2)$ |
|-----------|--------|-------------------------------|-----------------------------------|
| 12600     | 12800  | $(3.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-9}$ | $(3.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-9}$     |
| 48000     | 50000  | $(5.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-9}$ | $(5.5 \pm 0.4) \cdot 10^{-9}$     |
| 90000     | 100000 | $(8.4 \pm 0.9) \cdot 10^{-9}$ | $(7.5 \pm 0.8) \cdot 10^{-9}$     |
| 186000    | 214000 | $(1.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-8}$ | $(1.6 \pm 0.3) \cdot 10^{-8}$     |
| 300000    | 348000 | $(4.1 \pm 0.6) \cdot 10^{-8}$ | $(3.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-8}$     |
| 555000    | 833000 | $(8.4 \pm 3.0) \cdot 10^{-8}$ | $(5.6 \pm 2.0) \cdot 10^{-8}$     |

**Tabella 6.1:** Misure di rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità: per rendere omogenei i dati è stata effettuata una normalizzazione per il fattore  $Q_{int}/Q$ .



**Figura 6.3:** Grafico sperimentale dei dati riportati in tabella (6.1): la retta rappresenta il best fit con una funzione lineare.

### 6.1.2 Test con pick-up $k=0.005$ , $n_0=927$ Hz

E' stata scelta una capacità costituita da 3 condensatori da 150 nF nominali in serie, per una capacità a freddo misurata in  $C=52.9$  nF: questa capacità è stata poi mantenuta per tutte le altre misure. Dalla nuova frequenza di risonanza che è stata trovata a  $\nu_0=926.775$  Hz si è dedotta un'induttanza  $L \approx L_{eq}=(0.554 \pm 0.005)$  H compatibile con quella misurata nel test a 266 Hz.

Si è scelto inoltre un pick-up più piccolo con diametro 4mm per minimizzare gli effetti dello SQUID sull'oscillatore che si sono osservati nel test a 266 Hz. La misura di calibrazione ha fornito i seguenti valori:

$$K = (7.52 \pm 0.03) \cdot 10^5 \frac{V}{A}$$

$$G = (3.22 \pm 0.03) \cdot 10^{14} \frac{V}{A}$$

$$\frac{M}{L_I + L_P} = 0.21 \pm 0.01$$

Dall'induttanza del pick-up stimata in  $L_P \approx 0.01$   $\mu$ H con la formula (5.15) è stato stimato con la (5.14) un accoppiamento fra bobina e pick-up  $k=0.005$ .

Un primo risultato positivo di questo run sperimentale è stata la completa scomparsa dell'effetto di feedback dello SQUID osservato nel precedente test. Questo risultato non è stato ottenuto subito, ma solo dopo aver raffreddato il sistema alla temperatura di 2.1 K ed è stato poi sempre riprodotto. Nella nuova situazione si è misurato il fattore di qualità dell'oscillatore in varie configurazioni dell'elettronica: impostando diversi range del feedback 5,50,500  $\Phi_0$  e a SQUID spento. Si è trovato che in tutte queste condizioni i valori coincidono a meno di fluttuazioni minori di 1% per  $Q=10^6$ .

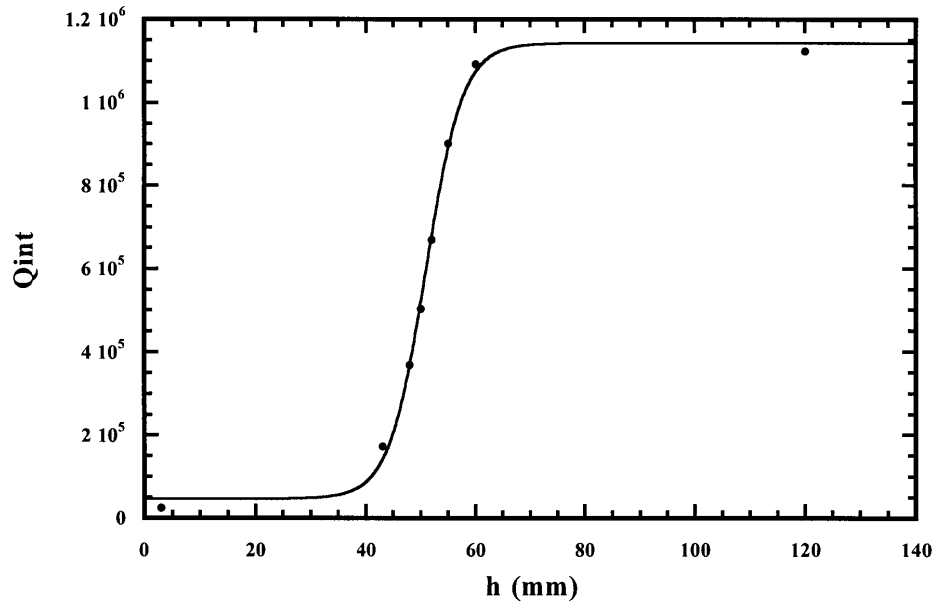
Il dissipatore ha permesso di variare il fattore di qualità fra un minimo di 21000 a un massimo di 1280000. Misure di  $Q$  a varie altezze del

dissipatore sono state effettuate (tab.6.2) a  $T=4.2$  K per poter ricavare una curva di calibrazione del  $Q$  intrinseco dell'oscillatore (fig.6.4), che diventerà poi utile nelle misure ad alto accoppiamento. Per l'altezza del dissipatore è stato preso come riferimento il punto più basso della corsa dell'asta. La misura di  $h$ , effettuata con calibro, ha un'incertezza che è stata valutata in  $\pm 0.2$  mm.

| $h$ (mm) $\pm 0.02$ mm | $Q_{\text{int}}$ ( $\pm 2\%$ ) |
|------------------------|--------------------------------|
| 3.0                    | 21000                          |
| 43.0                   | 125000                         |
| 48.0                   | 300000                         |
| 50.0                   | 435000                         |
| 52.0                   | 600000                         |
| 55.0                   | 844000                         |
| 55.5                   | 950000                         |
| 56.0                   | 980000                         |
| 120.0                  | 1280000                        |

**Tabella 6.2:** calibrazione del fattore di qualità intrinseco in funzione dell'altezza del dissipatore a 927 Hz

I fattori di qualità sono stati sostanzialmente riprodotti variando la temperatura: per quanto riguarda i  $Q$  bassi, dominati dal dissipatore, ciò è dovuto al fatto che la conducibilità elettrica del rame in questo range di temperatura è sostanzialmente saturata al valore indipendente dalla temperatura determinato dalle impurezze.



**Figura 6.4:** *Curva di calibrazione del fattore di qualità dell'oscillatore in funzione dell'altezza  $h$  del dissipatore. La curva di fit non deriva da un modello fisico, ed ha solo un'utilità pratica in quanto interpola bene i dati nella zona di regolazione.*

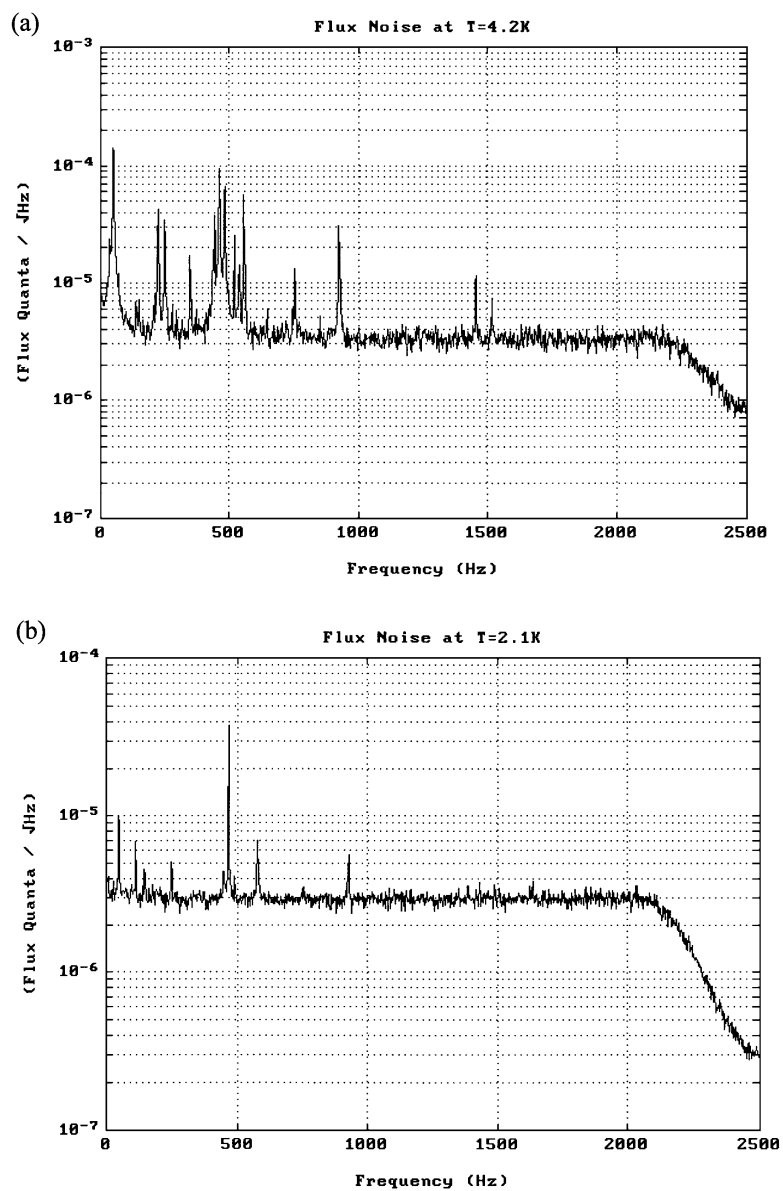
Nelle misure di rumore dell'oscillatore effettuate con questo accoppiamento c'è stato una notevole riduzione del rumore in eccesso osservato a 266Hz: il miglioramento non è stato casuale, ma è stato ottenuto dopo un lungo lavoro di ricerca delle possibili cause, vibrazionali ed elettromagnetiche, che in linea di principio potevano contribuire al rumore in flusso.

Per prima cosa si è cercato di ridurre le interferenze elettromagnetiche eliminando l'eccitatore che inizialmente era stato accoppiato induttivamente alla bobina, ed eliminando un giro di massa dovuto fra il criostato e la piattaforma antivibrante che inizialmente non era stato individuato. Anche

dopo questi accorgimenti il rumore dell'oscillatore é stato trovato abbondantemente superiore al livello previsto del rumore termico.

La principale causa di rumore in flusso è stata infine attribuita ai disturbi vibrazionali prodotti o trasportati dal gas di scambio presente nel discendente. Il fattore critico è stato individuato nella pressione del gas di scambio, che è stata misurata con un vacuometro capacitivo posto alla testa del discendente: abbassando la pressione al di sotto di un valore critico dell'ordine di 0.5 mbar l'intensità delle risonanze meccaniche a bassa frequenza viene drammaticamente ridotta, come si può notare confrontando i due spettri in fig.6.5.

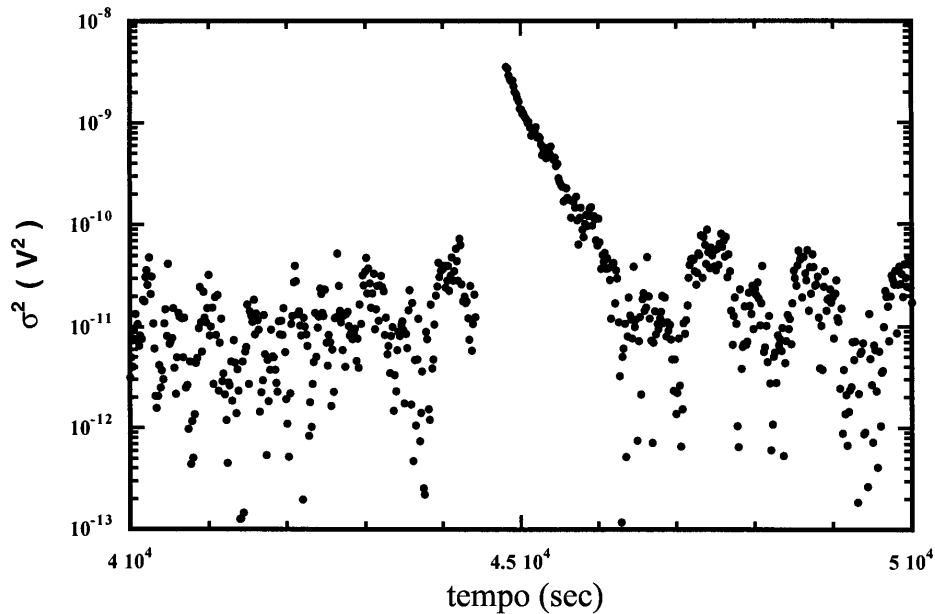
Nelle nuove condizioni di lavoro più "silenziose" è stato caratterizzato in maniera completa il rumore del sistema, variando entro i limiti imposti dall'apparato sperimentale sia la temperatura che il fattore di qualità. Sono state effettuate misure di rumore a quattro diverse temperature comprese fra 1.2 K e 4.2 K e per ogni temperatura è stato variato il fattore di qualità fra il minimo di 21000 e il massimo di 1280000.



**Figura 6.5:** Spettri di rumore (monolateri espressi in flusso allo SQUID) all'uscita dallo SQUID misurati in due situazioni diverse di temperatura e pressione all'interno del discendente: (a)  $T=4.2$  K,  $P=6$  mbar; (b)  $T=2.1$  K,  $P=0.6$  mbar; si nota nel caso (b) una notevole diminuzione delle risonanze meccaniche a bassa frequenza, dovuta all'abbassamento di pressione e una leggera diminuzione del livello di rumore bianco dovuta all'abbassamento di temperatura.



L'andamento temporale dell'uscita  $R^2$  del lock-in campionata durante le varie acquisizioni è stato trovato in buon accordo con le previsioni: le variazioni tipiche di  $R^2$  avvengono in genere su una scala temporale dell'ordine della costante di tempo dell'oscillatore  $\tau$ , con l'eccezione degli eventi di extranoise, caratterizzati da aumenti improvvisi dell'energia dell'oscillatore di alcuni ordini di grandezza (fig. 6.6). Questi eventi impulsivi hanno avuto in queste condizioni sperimentali una frequenza dell'ordine di 1 o 2 al giorno e possono essere stati causati da disturbi occasionali di vario tipo non ben riproducibili: sovrappressioni nel dewar provenienti dal tubo di recupero, rumori acustico-vibrazionali prodotti accidentalmente (operai al lavoro) oppure movimenti di flussoni nello schermo superconduttore. La caratteristica che permette di discriminare questi eventi dal rumore gaussiano dell'oscillatore è il tempo di salita dell'energia: se il rumore è gaussiano questo tempo non può differire molto dal tempo tipico di correlazione dell'oscillatore, cioè la sua costante di decadimento  $\tau$ ; se il tempo di salita è invece molto veloce è molto probabile che l'evento non sia gaussiano e si può decidere di rigettarlo. Si è deciso di rigettare tutti gli eventi chiaramente riconoscibili in base al tempo di salita e con un'energia superiore a 50 volte il valore medio. Per facilitare il riconoscimento degli eventi di extranoise l'uscita del lock-in è stata campionata a frequenza maggiore, salvo poi decimare i dati a uno ogni  $2\tau$  in modo da riottenere set di dati statisticamente non correlati. L'eliminazione è stata fatta tagliando tutta la parte di campionamento dall'inizio del picco fino al completo decadimento dello stesso nel rumore.

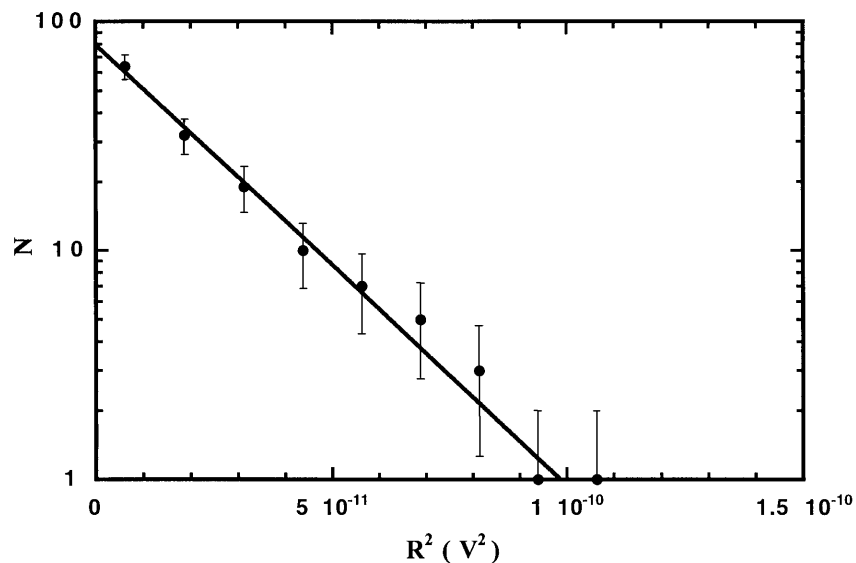


**Figura 6.6:** Esempio di evento di extranoise: le variazioni tipiche del segnale sono in genere dell'ordine del tempo di correlazione  $t$  dell'oscillatore (in questo caso  $t=450$  sec); l'improvvisa salita dell'energia di più di due ordini di grandezza permette di attribuire un tale evento a disturbi impulsivi esterni e quindi di scartarlo dall'acquisizione.

Gli istogrammi sperimentali della variabile  $R^2$  (fig.6.7) sono stati trovati sempre in ottimo accordo con una distribuzione statistica esponenziale. Rispetto alle misure del test a 266 Hz si notano istogrammi più regolari con un generale miglioramento del  $\chi^2$ .

L'errore tipico sul parametro  $\langle R^2 \rangle$  è dell'ordine dell'8% ed è essenzialmente limitato dalla lunghezza dei tempi di misura: per  $Q=1280000$  si ha  $\tau=450$  sec, e quindi per avere un numero significativo di punti, per esempio 300, campionati a  $2\tau$  sono necessari 3 giorni di acquisizione.

Non sempre è stato possibile scegliere la costante di tempo del lock-in in modo da poter applicare la (5.6). Si è reso quindi necessario



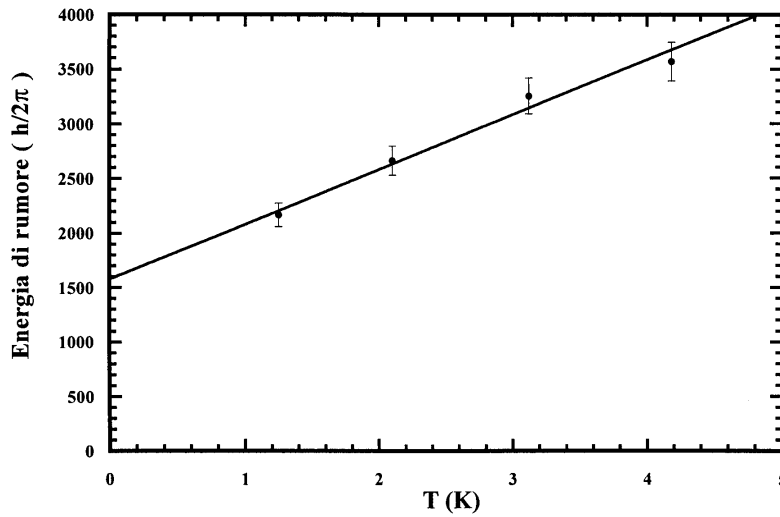
**Figura 6.7:** Esempio di istogramma della variabile  $R^2$ . Rispetto al test a 266 Hz (cfr fig.6.2) gli istogrammi sono più regolari. In questo caso il chi-quadro ridotto a 7 gradi di libertà è  $\chi^2(7)=0.2$ .

applicare la relazione completa (5.5) per determinare la varianza di rumore dell'oscillatore, sottraendo il contributo del rumore a banda larga. Lo spettro di potenza del rumore a banda larga è stato quindi misurato alle varie temperature. I dati sono riassunti in tab. 6.3 e, espressi in energia per unità di banda secondo la (2.9) sono stati graficati in fig. 6.8 e interpolati con una funzione lineare  $y=a+bx$ . I valori dei parametri determinati dal fit sono:

$$\begin{aligned}
 a &= (1580 \pm 160) \hbar \\
 b &= (500 \pm 60) \frac{\hbar}{\text{K}}
 \end{aligned}
 \tag{Fit 2}$$

| T (K) | $S_V$ ( $\mu\text{V}^2/\text{Hz}$ ) | $\varepsilon$ ( $\hbar$ ) |
|-------|-------------------------------------|---------------------------|
| 1.25  | 1.6                                 | 2200                      |
| 2.10  | 1.9                                 | 2650                      |
| 3.11  | 2.3                                 | 3250                      |
| 4.19  | 2.6                                 | 3600                      |

**Tabella 6.3:** Densità spettrale del rumore a banda larga all'uscita dello SQUID misurata alle varie temperature di lavoro. I dati sono espressi sia in tensione sia in energia attraverso la (2.9).

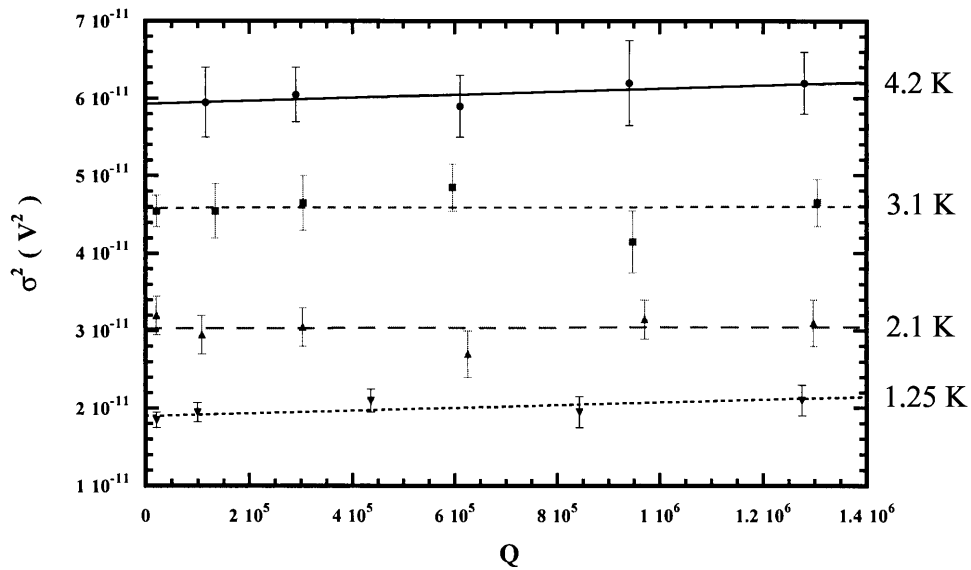


**Figura 6.8:** Densità spettrale di potenza del rumore a banda larga all'uscita dello SQUID espresso in energia per unità di banda. Solo la componente proporzionale alla temperatura è attribuibile allo SQUID, mentre la componente costante è probabilmente dovuta solo all'elettronica ( vedi paragrafo 6.1.3 )

In tab. 6.4 sono riportati i valori della varianza di rumore dell'oscillatore alle diverse temperature e ai diversi fattori di qualità. I dati sono stati poi graficati in funzione di Q su un unico grafico in fig. 6.9.

| T (K) | Q       | $\sigma^2$ ( $\mu\text{V}^2$ ) | $\delta(\sigma^2)$ ( $\mu\text{V}^2$ ) |
|-------|---------|--------------------------------|--|
| 1.250 | 21000   | 18.5                           | 1.0                                    |
|       | 99200   | 19.5                           | 1.2                                    |
|       | 435000  | 21.0                           | 1.5                                    |
|       | 843000  | 19.5                           | 2.0                                    |
|       | 1275000 | 21.0                           | 2.0                                    |
| 2.10  | 21000   | 32.0                           | 2.5                                    |
|       | 108000  | 29.5                           | 2.5                                    |
|       | 302000  | 30.5                           | 2.5                                    |
|       | 625000  | 27.0                           | 3.0                                    |
|       | 970000  | 31.5                           | 2.5                                    |
|       | 1290000 | 31.0                           | 3.0                                    |
| 3.12  | 21000   | 44.4                           | 2.0                                    |
|       | 134000  | 45.5                           | 3.5                                    |
|       | 304000  | 46.5                           | 3.5                                    |
|       | 595000  | 48.5                           | 3.0                                    |
|       | 947000  | 41.5                           | 4.0                                    |
|       | 1300000 | 46.5                           | 3.0                                    |
| 4.19  | 115000  | 59.5                           | 4.5                                    |
|       | 290000  | 60.5                           | 3.5                                    |
|       | 610000  | 59.0                           | 4.0                                    |
|       | 940000  | 62.0                           | 4.5                                    |
|       | 1280000 | 62.0                           | 4.0                                    |

**Tabella 6.4:** *Varianza di rumore dell'oscillatore a varie temperature e a vari fattori di qualità.*



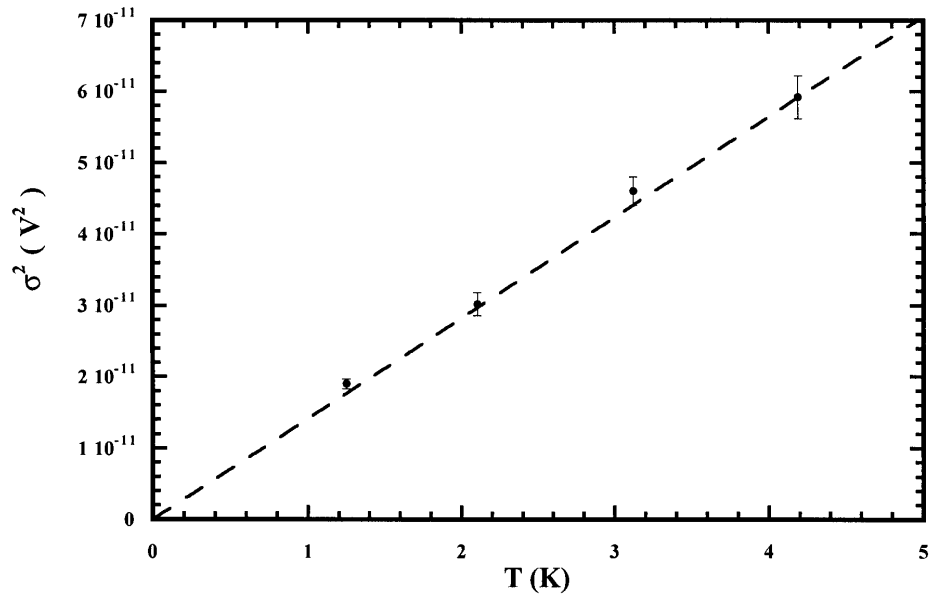
**Figura 6.9:** *Varianza di rumore dell'oscillatore a varie temperature e vari fattori di qualità: sono mostrate per ogni temperatura le rette ottenute da un fit lineare dei dati, i cui coefficienti sono riportati in tab. 6.5.*

Sono stati quindi effettuati per ogni temperatura dei fit lineari pesati per individuare la componente costante e la componente proporzionale a  $Q$ .

I risultati dei fit sono riassunti in tabella 6.5. I dati relativi alle intercette, che secondo il nostro modello devono corrispondere al rumore termico dell'oscillatore sono graficati in fig. 6.10, dove è stata graficata anche la retta corrispondente al rumore termico atteso alle varie temperature in base alla misura di calibrazione.

| T ( K ) | a ( $10^{-11} \text{ V}^2$ ) | b ( $10^{-18} \text{ V}^2$ ) |
|---------|------------------------------|------------------------------|
| 1.247   | $1.90 \pm 0.07$              | $1.7 \pm 1.5$                |
| 2.103   | $3.02 \pm 0.16$              | $0 \pm 2$                    |
| 3.118   | $4.6 \pm 0.2$                | $0 \pm 3$                    |
| 4.190   | $5.9 \pm 0.3$                | $2 \pm 4$                    |

**Tabella 6.5:** Parametri dei fit dei dati in fig.6.9 con una funzione lineare alle varie temperature. La funzione di fit è  $s^2=a+bQ$ .



**Figura 6.10:** Contributo del rumore termico alle varie temperature di operazione stimato dall'intercetta dei fit dei dati in fig. 6.9 in funzione di  $Q$ . La retta tratteggiata rappresenta il rumore termico atteso in base alla (5.3) e alla misura di calibrazione, senza alcun parametro libero.

### 6.1.3 Discussione

Le misure di rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità nel test a 266 Hz hanno fornito una prima approssimativa verifica del modello teorico sviluppato nel capitolo 3. L'intercetta di Fit 1  $a = (2.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-9} \text{ V}^2$  è sostanzialmente in accordo entro 1.5 barre d'errore con la previsione teorica del rumore termico ricavata dal teorema di Nyqvist e dalla misura di calibrazione  $\sigma_T^2 = (2.70 \pm 0.05) \cdot 10^{-9} \text{ V}^2$ .

Il contributo proporzionale al fattore di qualità dovrebbe essere attribuibile essenzialmente al rumore in flusso alla bobina in quanto l'accoppiamento è troppo basso per poter osservare un contributo di back action dello SQUID<sup>2</sup>. Assumendo questa ipotesi dal valore della pendenza di Fit 1  $b = 7 \cdot 10^{-14} \text{ V}^2$  si può calcolare in base alla seconda delle (5.5) un densità spettrale di rumore in tensione  $S_F = 5.5 \cdot 10^{-24} \text{ V}^2/\text{Hz}$ . Questa corrisponde in termini di flusso a  $S_\Phi = \omega^{-2} S_F \sim 10^{-30} \text{ Wb}^2/\text{Hz}$  che, considerando l'area efficace della bobina  $A_{\text{eff}} \sim 13 \text{ m}^2$  corrisponde a un campo magnetico fluttuante di  $10^{-16} \text{ T} / \sqrt{\text{Hz}}$  alla frequenza di 266 Hz,

Il run a 927 Hz è stato fondamentale per l'identificazione delle principali sorgenti di rumore in flusso. In particolare è stato messo in evidenza il ruolo fondamentale del gas di scambio, anche se non è stato completamente chiarito il meccanismo che è coinvolto. Una possibilità è che il gas di scambio abbia solo un ruolo di mediatore dei disturbi acustici esterni: l'abbassamento di pressione diminuirebbe semplicemente l'efficienza con cui l'energia dei disturbi viene trasportata dal gas. Un'altra

---

<sup>2</sup> Questa ipotesi sarà confermata a posteriori: assumendo l'ipotesi  $I_N = L_I$  che è stata verificata ad accoppiamento elevato (si veda paragrafo 6.2.3) si può calcolare in base alla (5.5) con  $k \sim 0.02$  un contributo di back action pari a  $\sigma_{\text{Back}}^2 \approx 10^{-19} \text{ V}^2 \cdot Q$



ipotesi è che si inneschino delle vere e proprie risonanze termoacustiche all'interno del discendente provocate dai gradienti di temperatura fra la parte immersa in elio e la parte alta a temperatura ambiente. In ogni caso la correlazione tra abbassamento della pressione e riduzione del rumore in flusso è abbastanza evidente, e soprattutto è una circostanza facilmente riproducibile.

I dati riassunti in tab. 6.4 e graficati in fig. 6.9 mostrano chiaramente che il contributo del rumore in flusso è zero entro l'incertezza sulla misura fino a fattori di qualità maggiori di  $10^6$  a tutte le temperature di lavoro. L'errore sulle pendenze riportate in tab. 6.5  $b < 2 \cdot 10^{-18}$  permette di stabilire un limite superiore alla densità spettrale del rumore in tensione associato al rumore in flusso in  $S_F \sim 10^{-26} \text{ V}^2/\text{Hz}$ . Questo corrisponde in termini di flusso a  $S_\Phi = \omega^{-2} S_F \sim 10^{-34} \text{ Wb}^2/\text{Hz}$  che, considerando l'area efficace della bobina  $A_{\text{eff}} \sim 13 \text{ m}^2$ , corrisponde a un campo magnetico fluttuante di  $10^{-18} \text{ T} / \sqrt{\text{Hz}}$  alla frequenza di 927 Hz. Questo significa che rispetto al test a 266 Hz c'è stato un miglioramento di almeno due ordini di grandezza in ampiezza e quattro ordini di grandezza in energia.

I dati sperimentali confermano inoltre l'esistenza di una sorgente di rumore termico associata alla parte dissipativa dell'oscillatore dipendente linearmente dalla temperatura. I risultati riassunti in fig. 6.10 sono in ottimo accordo con la retta teorica attesa in base alla (5.3) e alla misura di calibrazione. La temperatura termodinamica dell'elemento dissipante, sia esso il dissipatore in rame o il materiale isolante nei condensatori, è risultata pari alla temperatura termometrica del bagno di elio liquido. Il sistema potrebbe essere quindi usato in linea di principio come termometro di rumore.

I risultati fin qui discussi forniscono delle informazioni utili nell'ambito dell'esperimento AURIGA. Il modo elettrico LC della catena di

trasduzione (fig.1.1) è infatti molto simile all'oscillatore LC usato in questo esperimento, in quanto è basato su una bobina superconduttrice schermata (il primario del trasformatore) che rappresenta uno dei possibili ingressi di rumore in eccesso dell'intero rivelatore. I dati sperimentali qui presentati mostrano che un simile sistema è essenzialmente "termico", se si escludono i rari eventi di extranoise osservati (fig.6.6). Inoltre è stato accertato che i principali eccessi di rumore che si possono osservare in condizioni di cattivo isolamento (fig. 6.2) sono di origine vibrazionale, e sarebbero quindi fortemente attenuati su AURIGA, che presenta un isolamento meccanico superiore di alcuni ordini di grandezza a quello dell'apparato usato in questo esperimento.

Per concludere questo capitolo osserviamo che le misure realizzate a 266 Hz permettono di fare alcune considerazioni qualitative sulla resistenza di ingresso dello SQUID. Separando i contributi alla dissipazione totale dello SQUID e dell'oscillatore mediante la relazione:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{int}}} + \frac{1}{Q_{\text{Squid}}} \quad (6.1)$$

e tenendo conto delle (3.18) si può scrivere:

$$R_I = \omega_0 L_{\text{eq}} \left( \frac{M}{L_I + L_P} \right)^{-2} \left( \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_{\text{int}}} \right) \quad (6.2)$$

Con i dati misurati dei parametri e i valori<sup>3</sup> di  $Q$  e  $Q_{\text{int}}$  riportati in tab. 6.1 si può ricavare un valore della resistenza di ingresso  $R_I \approx 2 \cdot 10^{-4} \Omega$ , che è circa il 7% della parte immaginaria  $\omega_0 L_I = 3.1 \cdot 10^{-3} \Omega$ . Secondo le previsioni di [9]  $R_I$  dovrebbe essere a queste frequenze invece almeno due ordini di grandezza più piccola di  $\omega_0 L_I$ .

---

<sup>3</sup> Nei valori in tab.6.1 il  $Q$  è misurato con lo SQUID operato in range 5, come nelle misure di rumore.

Il fatto che  $R_I$  sia proporzionale al guadagno a loop chiuso, cioè alle variazioni effettive del flusso applicato allo SQUID, conduce a ipotizzare che quello osservato sia un effetto dovuto allo schermaggio dello SQUID e non ad accoppiamenti spuri fra elettronica e bobina di ingresso. Questa ipotesi è confermata anche dal fatto che l'effetto è scomparso durante un run sperimentale variando la temperatura, cosa che non dovrebbe avere alcuna influenza sull'elettronica che è a temperatura ambiente. Possiamo avanzare l'ipotesi che l'impedenza d'ingresso anomala osservata nel primo test a 266 Hz sia dovuta a una "dissimmetrizzazione" delle giunzioni provocata dall'intrappolamento di un vortice di flusso in una delle due giunzioni: questo vortice sarebbe poi stato rimosso variando la temperatura.

## 6.2 Misure ad alto accoppiamento

### 6.2.1 Test con pick-up $k=0.15$ , $n_0=943$ Hz

La frequenza di risonanza dell'oscillatore è stata trovata a  $\nu_0=943.32$  Hz, che risulta maggiore della frequenza a basso accoppiamento di poco più dell'1%: la variazione è dovuta alla controreazione del trasformatore superconduttore che abbassa l'induttanza efficace della bobina.

Le prime misure di fattore di qualità hanno subito messo in evidenza gli effetti della parte reale dell'impedenza di ingresso. In particolare si è trovato che quest'ultima dipende pesantemente dalla configurazione dell'elettronica. Un'ampia regione dello "spazio delle fasi elettronico" definito dalle coordinate BIAS, MOD e  $G_{pp}$  risulta non utilizzabile in quanto produce fattori di qualità negativi destabilizzando il sistema.

Un altro fenomeno che limita le possibili configurazioni dell'elettronica è la comparsa di un'autooscillazione alla frequenza di circa 60 kHz non appena il guadagno a loop aperto della rete di feedback supera una certa soglia critica: l'origine della risonanza è probabilmente legata a un polo della rete di feedback che entra in una regione di instabilità. Il comportamento dello SQUID in presenza dell'autooscillazione è evidentemente anomalo, visto che il rumore a banda larga peggiora di un'ordine di grandezza e si è quindi evitato di lavorare in tali condizioni.

La necessità di lavorare in una configurazione in cui  $R_i \geq 0$  (cold damping) e in cui la risonanza a 60 kHz è disattivata ha imposto una restrizione piuttosto forte sul guadagno a loop aperto dell'elettronica, in particolare ha imposto un abbassamento di MOD e  $G_{pp}$ . La configurazione tipica in cui si è lavorato è la seguente:

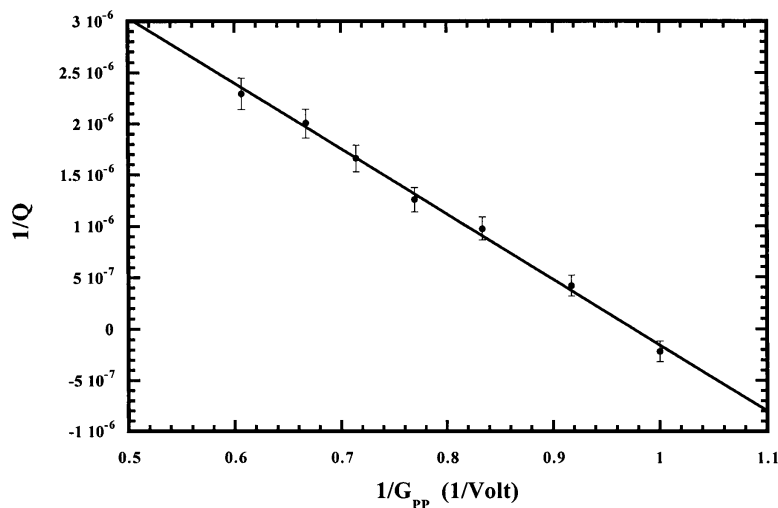
$$\text{BIAS} = 2.570 \text{ V}$$

$$\text{MOD} = 1.700 \text{ V}$$

$$G_{pp} < 1.60 \text{ V}$$

Il valore della corrente di bias è ottimale mentre il valore di  $G_{pp}$  è circa la metà del valore tipico di 3V. Questo fatto può produrre un sensibile peggioramento del rumore a banda larga dello SQUID e dello slew-rate dell'elettronica: la densità spettrale del rumore a banda larga è stata infatti misurata pari a  $S_v = 4.5 \cdot 10^{-12} \text{ V}^2 / \text{Hz}$ , un valore che è quasi il doppio di quello misurato a basso accoppiamento (cfr. tab. 6.3) con setting ottimale dell'elettronica.

Per valutare gli effetti dell'elettronica sul fattore di qualità è stata effettuata a una prima serie di misure di  $Q$  mantenendo fissata la posizione del dissipatore ad un'altezza  $h=52\text{mm}$  corrispondente a  $Q_{int}=600000$  e variando il guadagno agendo solamente sull'amplificatore e mantenendo la corrente di bias al valore ottimo. I risultati sono riassunti in fig. 6.11 dove è stato graficato  $1/Q$  in funzione di  $1/G_{pp}$ .

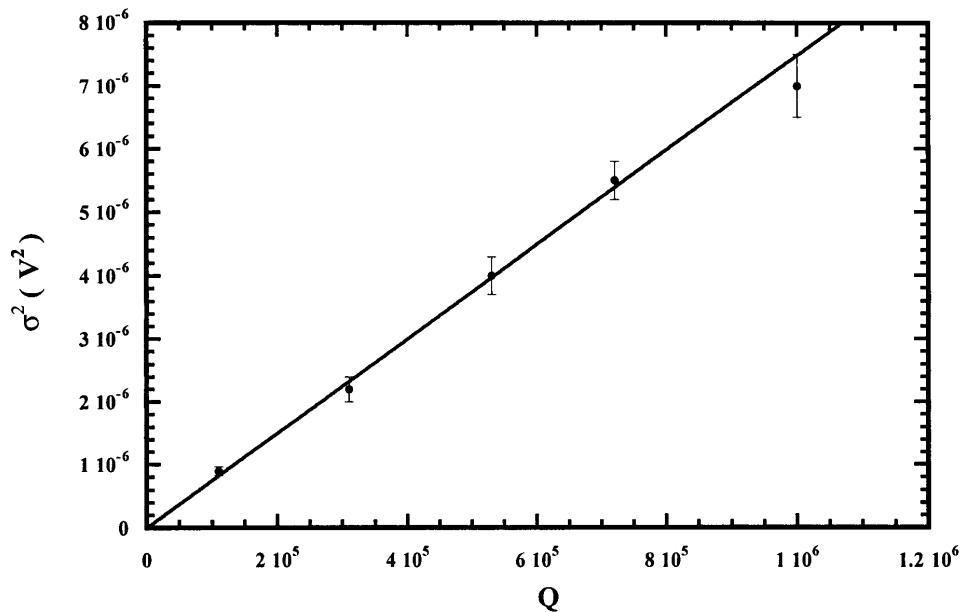


**Figura 6.11:** Andamento del fattore di qualità in funzione del guadagno a loop aperto dell'elettronica operata a loop chiuso.

Un'altra serie di misure è stata effettuata al fine di verificare l'ipotesi di cold damping: la posizione del dissipatore è stata ancora fissata al valore  $h=52\text{mm}$  corrispondente a  $Q_{\text{int}} \sim 600000$ , e si è variato il fattore di qualità  $Q$  mediante piccole variazioni del guadagno dell'amplificatore. In corrispondenza dei diversi valori di  $Q$  è stato misurato il rumore del picco di risonanza con la consueta tecnica. I dati, riportati in tab. 6.6 sono stati graficati in fig. 6.12 e interpolati con una retta passante per l'origine.

| Q                   | $\sigma^2 (V^2)$              |
|---------------------|-------------------------------|
| $110000 \pm 1000$   | $(9.0 \pm 0.7) \cdot 10^{-7}$ |
| $310000 \pm 3000$   | $(2.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ |
| $30000 \pm 10000$   | $(4.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}$ |
| $720000 \pm 10000$  | $(5.5 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}$ |
| $1000000 \pm 20000$ | $(7.0 \pm 0.5) \cdot 10^{-6}$ |

**Tabella 6.6:** *Varianza del rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità: il fattore di qualità intrinseco è  $\sim 600000$  e il  $Q$  è stato modificato variando solo il guadagno a loop aperto della rete di feedback, cioè variando l'effetto di "cold damping" dello SQUID.*



**Figura 6.12:** Verifica sperimentale dell'ipotesi di cold damping: i dati sono ben interpolati da una retta passante per l'origine, in accordo con il modello teorico ( eq.(5.3)).

E' opportuno notare che con questo accoppiamento il contributo del rumore a banda larga nelle misure di rumore alla risonanza è completamente trascurabile: il contributo alla varianza di rumore totale a  $\tau_{lk}=1s$  è  $\sigma_s^2 = 4.5 \cdot 10^{-12} V^2 / Hz$ , vale a dire quasi 6 ordini di grandezza più piccolo del contributo dell'oscillatore. Questo fatto ha permesso di allargare anche la banda del lock-in in modo da restare nel range di applicabilità della (5.6).

E' stato effettuato a questo punto un primo vero tentativo di mettere in evidenza un contributo di back action dello SQUID: è stata fissata la configurazione dell'elettronica ed è stato variato il fattore di qualità intrinseco spostando la posizione del dissipatore.

I risultati sono riassunti in tab.6.7 . La varianza del rumore  $\sigma^2$  è stata quindi normalizzata per il fattore  $Q_{int}/Q$  e la quantità ottenuta è graficata in funzione di  $Q_{int}$  in figura 6.13.

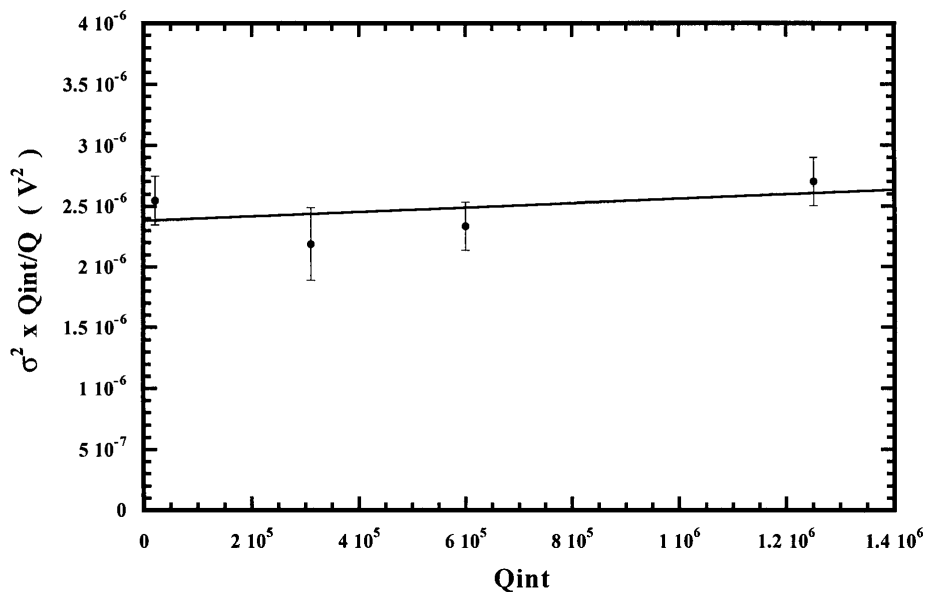
L'incertezza complessiva sui dati così ottenuti risulta dalla somma in quadratura di tre contributi: l'errore intrinseco sulla misura di rumore e gli errore sulle stime di  $Q$  e  $Q_{int}$ . Rispetto alle misure a basso accoppiamento si sono infatti presentati due ulteriori inconvenienti:

- ◆ Il fattore di qualità effettivo  $Q$  non rimane costante nel corso di una misura. Questo comportamento è attribuibile ai drift in alcuni componenti all'interno dell'elettronica e all'elevata sensibilità con cui l'impedenza di ingresso effettiva dello SQUID risponde a queste piccole variazioni. La variazione tipica del  $Q$  è risultata dell'ordine del 5% nell'arco di tempo di una decina di ore necessaria per la misura di rumore.
- ◆ Non è possibile misurare direttamente il fattore di qualità intrinseco dell'oscillatore utilizzando la tecnica descritta nel paragrafo 6.1.1. Lo spegnimento dell'elettronica infatti provoca una fortissima dissipazione, forse associabile al superamento della corrente critica delle giunzioni. Inoltre i fattori di qualità misurati a diversi range non seguono più la legge lineare osservata a basso accoppiamento (fig. 6.1) e non consentono quindi di estrapolare il fattore di qualità intrinseco a range infinito. Per la valutazione di  $Q_{int}$  ci si è quindi affidati alla calibrazione del dissipatore a basso accoppiamento (vedi tab.6.2), che presenta un'incertezza dell'ordine del 2-3%.



| $Q_{int}$ | $Q$                | $\sigma^2 (V^2)$              | $\sigma^2 Q_{int}/Q (V^2)$    |
|-----------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 21000     | $20500 \pm 500$    | $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ | $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ |
| 300000    | $300000 \pm 15000$ | $(2.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ | $(2.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-6}$ |
| 600000    | $480000 \pm 10000$ | $(1.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ | $(2.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ |
| 1280000   | $680000 \pm 20000$ | $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$ | $(2.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-6}$ |

**Tabella 6.7:** Varianza normalizzata del rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità con pick-up  $k=0.15$ .



**Figura 6.13:** Varianza normalizzata del rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità con  $k=0.15$  con la retta di best fit dei dati: la pendenza della retta è ancora zero entro gli errori di misura.

In base alle equazioni (5.3) ci si aspetta per la varianza normalizzata un contributo costante per il rumore termico e un contributo lineare in  $Q_{int}$  per il rumore di back action o per l'eventuale rumore in flusso. E' stato quindi effettuato un fit pesato sugli errori con una funzione lineare del tipo  $y=a+bx$ . I valori dei parametri ottenuti dal fit sono:

$$\begin{aligned} a &= (2.3 \pm 0.2) 10^{-6} \text{ V}^2 \\ b &= (1.7 \pm 2.2) 10^{-13} \text{ V}^2 \end{aligned} \quad (\text{Fit 3})$$

A causa degli inconvenienti vari legati alla stabilizzazione del sistema la misura di calibrazione è stata effettuata dopo le misure di rumore, in modo da riprodurre lo stesso setting dell'elettronica e valutare correttamente la funzione di trasferimento  $G$  dello SQUID a loop chiuso, che in linea di principio può dipendere dalla frequenza se lo slew-rate è troppo basso. Si è trovato in effetti per  $G$  con il setting delle misure di rumore e alla frequenza di lavoro di 943 Hz il valore:

$$G = (3.43 \pm 0.05) \cdot 10^{14} \frac{\text{V}}{\text{Wb}}$$

che risulta sensibilmente superiore al valore misurato in condizioni di slew-rate ottimo. A bassa frequenza per esempio si riottiene il valore corretto:

$$G = (3.22 \pm 0.05) \cdot 10^{14} \frac{\text{V}}{\text{Wb}}$$

La misura di calibrazione ha fornito inoltre i valori :

$$K = (1.50 \pm 0.05) 10^8 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

$$\frac{M}{L_I + L_P} = 40.0 \pm 0.5$$

$$L_{eq} = (0.548 \pm 0.005) \text{ H}$$

Dall'induttanza del pick-up stimata in  $L_P \sim 2 \mu\text{H}$  con la formula (5.15) è stato stimato con la (5.14) un accoppiamento fra bobina e pick-up  $k=0.15$ .

### 6.2.2 Test con pick-up $k=0.56$ , $n_0=1032$ Hz

Questo accoppiamento è il più alto che si è riusciti a ottenere. Si sono presentati gli stessi problemi di stabilizzazione già evidenziati con il pick-up  $k=0.15$ . Si è cercato quindi di trovare una configurazione dell'elettronica tale da permettere di lavorare con  $Q$  dell'ordine di 100.000 in una situazione di "cold damping". C'è da notare infatti che la possibilità di lavorare con  $Q$  effettivi più bassi permette di diminuire notevolmente i tempi di misura, in quanto questi sono proporzionali al tempo di correlazione  $\tau$ , cioè a  $Q$ . La configurazione che è stata scelta e mantenuta fissa durante le misure di rumore è la seguente:

$$\text{BIAS} = 2.570 \text{ V} \quad (\text{ottimale})$$

$$\text{MOD} = 0.700 \text{ V}$$

$$G_{pp} < 1.35 \text{ V}$$

La frequenza di risonanza dell'oscillatore è stata trovata a  $\nu_0=1032.650$  Hz, più alta di circa il 10% rispetto alle misure precedenti.

La misura di calibrazione, che è stata effettuata dopo le misure di rumore per poter riprodurre lo stesso setting dell'elettronica, ha fornito inoltre i seguenti valori:

$$K = (5.549 \pm 0.004) \cdot 10^8 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

$$G = (3.30 \pm 0.03) \cdot 10^{14} \frac{\text{V}}{\text{Wb}}$$

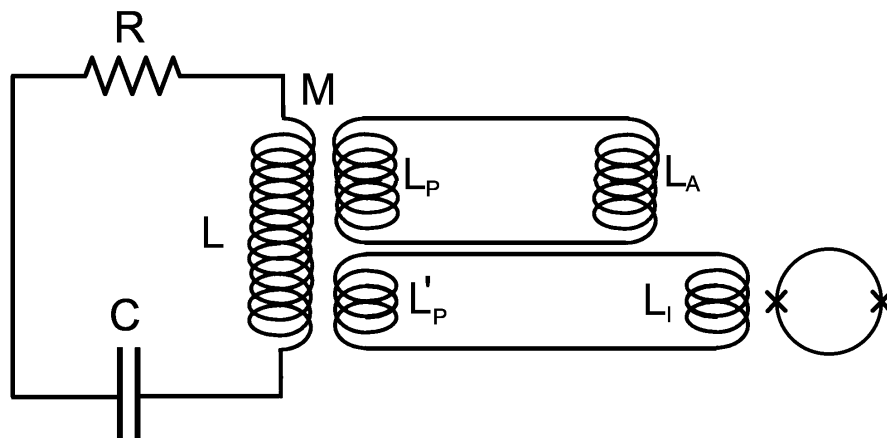
$$\frac{M}{L_I + L_P} = 152 \pm 1$$

$$L_{eq} = (0.458 \pm 0.004) \text{ H}$$

Dall'induttanza del pick-up misurata a temperatura ambiente con LCR-meter  $L_P \sim 1.8 \mu\text{H}$  è stato stimato con la (5.14) un accoppiamento fra bobina e pick-up  $k=0.56$ .

E' interessante notare che  $k$  può essere ricavato anche dallo spostamento della frequenza di risonanza dovuto all'abbassamento dell'induttanza equivalente  $L_{eq}$  rispetto all'induttanza a basso accoppiamento  $L=0.554$  H: se si usa a tale scopo la prima delle (3.18) si trova  $k \approx 0.59$ , in discreto accordo col valore ricavato precedentemente.

Dal momento che la frequenza di risonanza si è spostata di quasi il 10% rispetto alle misure a basso accoppiamento si può presumere che siano cambiate sensibilmente anche le dissipazioni dell'oscillatore sia nel teflon dei condensatori sia del dissipatore di rame: si è reso quindi necessario un'apposito run di calibrazione del  $Q$  intrinseco in funzione della posizione del dissipatore da effettuare alla stessa frequenza di lavoro ma in una situazione in cui l'impedenza di ingresso dello SQUID è trascurabile.



**Figura 6.14:** Schema circuitale per la misura del fattore di qualità intrinseco: la bobina superconduttrice  $L_a \sim L_I$  permette di riprodurre entro l'1% la frequenza di risonanza che si trova con lo SQUID fortemente accoppiato tramite il pick-up  $L_P$ . In questa configurazione invece lo SQUID è debolmente accoppiato tramite  $L'_P$  e non influenza l'oscillatore.

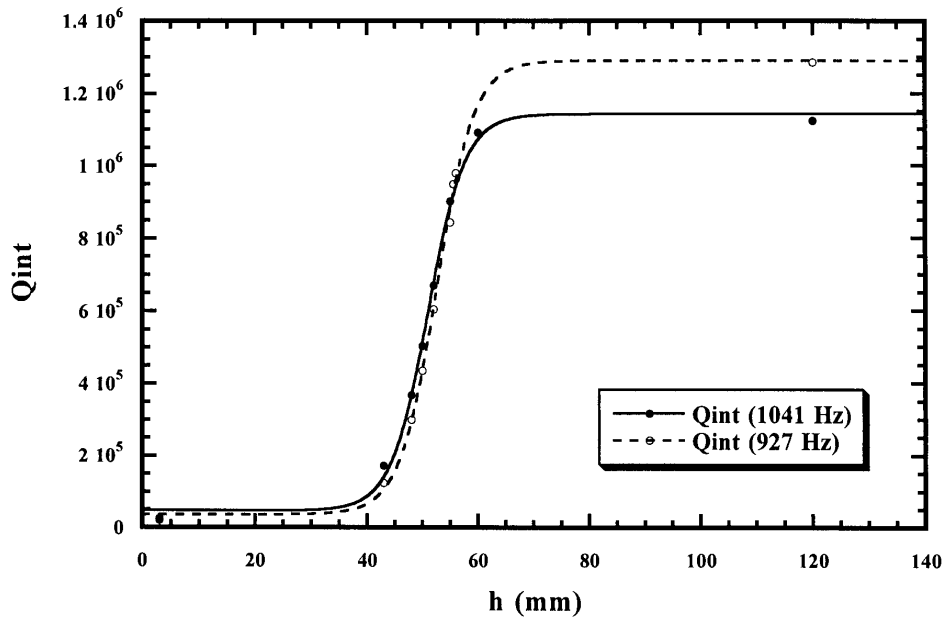
A questo scopo si è deciso di collegare lo SQUID allo stesso pick-up con  $k=0.005$  usato nelle misure a basso accoppiamento e di chiudere il pick-up

fortemente accoppiato su una bobina superconduttrice ausiliaria  $L_a$  di induttanza paragonabile a quella di ingresso dello SQUID (fig. 6.14).

La bobinetta ausiliaria  $L_a$  è stata costruita avvolgendo 30 giri di filo di NbTi su un supporto in PVC di diametro 3 mm e chiudendo il tutto in uno schermo cilindrico di niobio. La bobinetta è stata piazzata nella zona di SQUID e termometro. Una misura a caldo con LCR-meter ha fornito per  $L_a$  all'interno dello schermo il valore  $L_a=1.52 \mu\text{H}$ , che risulta dello stesso ordine di grandezza dell'induttanza di ingresso dello SQUID  $L_I=1.88 \mu\text{H}$ . La nuova frequenza di risonanza è stata quindi trovata a  $\nu_0=1041.650 \text{ Hz}$ , valore che approssima al meglio dell'1% la frequenza di risonanza 1032 Hz relativa alle misure di rumore. In tabella 6.8 sono riportati i valori del  $Q_{\text{int}}$  misurato in funzione dell'altezza del dissipatore. In fig. 6.15 sono graficate contemporaneamente le due curve di calibrazione a 927 Hz e a 1041 Hz. E' evidente che il fattore di qualità del teflon (alto Q) è sensibilmente peggiorato, mentre quello del cilindretto di rame (basso Q) è aumentato. Le variazioni sono in entrambi i casi dell'ordine del 10 %.

| h (mm) $\pm 0.02$ mm | $Q_{\text{int}}$ ( $\pm 2\%$ ) |
|----------------------|--------------------------------|
| 3                    | 25000                          |
| 43                   | 173000                         |
| 48                   | 368000                         |
| 50                   | 503000                         |
| 52                   | 670000                         |
| 55                   | 902000                         |
| 60                   | 1092000                        |
| 120                  | 1124000                        |

**Tabella 6.8:** Nuova calibrazione del fattore di qualità intrinseco in funzione dell'altezza del dissipatore a 1041 Hz.



**Figura 6.15:** *Fattore di qualità intrinseco in funzione dell'altezza del dissipatore alla frequenza di risonanza intrinseca ( 927 Hz ) e alla frequenza di risonanza effettiva (1041 Hz) che è modificata dal forte accoppiamento con lo SQUID.*

Le misure di rumore che sono state effettuate a questo accoppiamento sono riportate in tabella 6.9. E' stata calcolata per ogni dato la varianza normalizzata moltiplicando  $\sigma^2$  per il fattore  $Q_{int}/Q$ . I dati così ottenuti sono stati graficati in fig. 6.16. L'errore sui punti è calcolato sommando in quadratura l'errore sulla determinazione di  $\sigma^2$  e l'errore introdotto dalle variazioni di  $Q$  dovute ai drift dell'elettronica, che sono state sempre dell'ordine del 5%, mentre l'errore su  $Q_{int}$  dell'ordine di 2% è praticamente trascurabile. Un fit lineare pesato sugli errori con una funzione del tipo  $y=a+bx$  ha fornito per i coefficienti i valori:

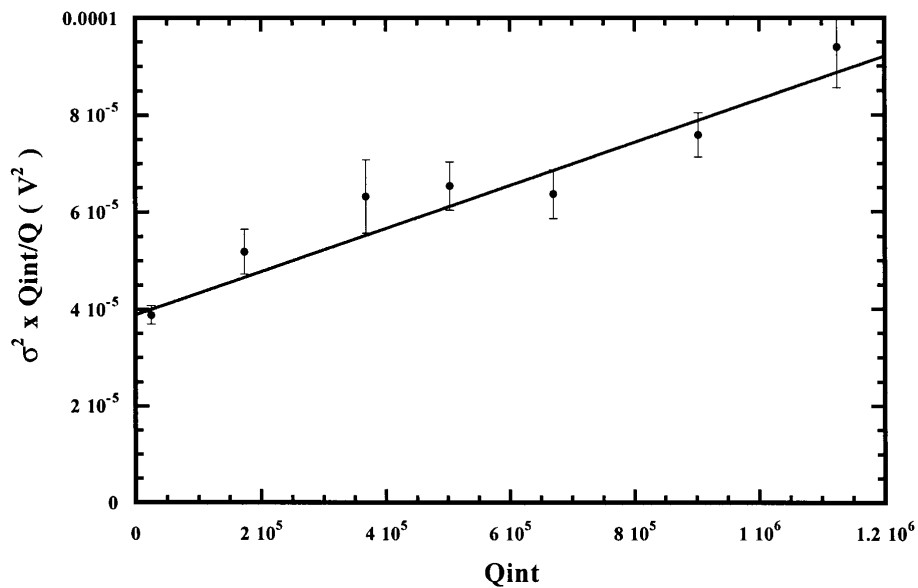
$$a = (3.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-5} \text{ V}^2$$

$$b = (4.4 \pm 0.4) \cdot 10^{-11} \text{ V}^2$$

(Fit 4)

| $Q_{int}$ | $Q$                | $\sigma^2 (V^2)$                | $\sigma^2 Q_{int}/Q (V^2)$    |
|-----------|--------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 25000     | $22500 \pm 5000$   | $(3.60 \pm 0.15) \cdot 10^{-5}$ | $(3.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-5}$ |
| 173000    | $80000 \pm 3000$   | $(2.38 \pm 0.17) \cdot 10^{-5}$ | $(5.2 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}$ |
| 368000    | $150000 \pm 15000$ | $(2.58 \pm 0.10) \cdot 10^{-5}$ | $(6.3 \pm 0.8) \cdot 10^{-5}$ |
| 503000    | $113000 \pm 2000$  | $(1.47 \pm 0.11) \cdot 10^{-5}$ | $(6.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}$ |
| 670000    | $166000 \pm 5000$  | $(1.58 \pm 0.11) \cdot 10^{-5}$ | $(6.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}$ |
| 902000    | $114000 \pm 3000$  | $(9.6 \pm 0.6) \cdot 10^{-6}$   | $(7.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-5}$ |
| 1124000   | $159000 \pm 13000$ | $(1.33 \pm 0.06) \cdot 10^{-5}$ | $(9.4 \pm 0.8) \cdot 10^{-5}$ |

**Tabella 6.9:** *Varianza normalizzata del rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità con  $k=0.56$ .*



**Figura 6.16:** *Varianza normalizzata del rumore dell'oscillatore in funzione del fattore di qualità con  $k=0.15$  con la retta di best fit dei dati: la componente proporzionale a  $Q_{int}$  è il rumore di back action dello SQUID.*

### 6.2.3 Discussione

La stabilizzazione del sistema SQUID + oscillatore ad alto  $Q$  in condizioni di elevato accoppiamento era una delle maggiori incognite dell'esperimento, dato che non è stata fatta ancora una completa caratterizzazione delle proprietà dell'impedenza di ingresso di SQUID operati a loop chiuso.

È probabile che la resistenza di ingresso  $R_I$  sia prodotta da entrambi gli effetti anticipati nel cap. 2.4: da una parte l'effetto di schermaggio dello SQUID dall'altra gli sfasamenti nella catena di amplificazione-feedback che vengono riportati in ingresso attraverso una mutua induzione spuria fra bobina di ingresso e bobina di feedback. Ciò che è importante ai nostri scopi è che la combinazione dei due contributi (intrinseco ed elettronico) all'impedenza di ingresso ha permesso di trovare regioni di stabilità, cioè con  $Q > 0$ , mantenendo la corrente di bias al valore ottimale. Anzi, la dipendenza di  $R_I$  dal guadagno a loop aperto (fig. 6.11) è stata da un certo punto di vista vantaggiosa, perché ha introdotto una "leva" in più nell'apparato: è stato possibile infatti regolare il fattore di qualità su valori relativamente bassi ( $Q \sim 10^5$ ) in modo da abbassare la costante di tempo dell'oscillatore e quindi accorciare i tempi di misura. Il prezzo che si è dovuto pagare è stato un sensibile peggioramento delle prestazioni dell'elettronica a causa del basso guadagno. Il peggioramento del rumore a banda larga non ha conseguenze pratiche in questo esperimento in quanto il segnale dell'oscillatore è così elevato che il contributo del rumore a banda larga dopo il filtraggio del lock-in è 5-6 ordini di grandezza più piccolo, quindi trascurabile.



Dai fattori di qualità ottenuti (tab.6.9) possiamo stimare grossolanamente la resistenza di ingresso effettiva  $R_I$ . Utilizzando le formule (6.1) e (6.2) e ponendo  $1/Q_{\text{Squid}} \sim 1/Q \sim 10^{-5}$  si trova:

$$R_I < 10^{-5} \Omega \sim 10^{-3} \omega_0 L_I$$

Resta quindi confermata l'ipotesi  $R_I \ll \omega_0 L_I$ , che è stata assunta nel capitolo 3 per derivare le (3.18).

L'ipotesi di "cold damping" è stata direttamente verificata nella misura riportata in fig. 6.12. I dati mostrano che il rumore, qualunque sia la sua origine, viene amplificato linearmente dal fattore di qualità effettivo  $Q$ , entro gli errori di misura: questo è in accordo con il modello teorico che è riassunto nelle equazioni (5.3). Un eventuale contributo di rumore dipendente da  $R_I$  avrebbe dovuto manifestarsi con effetti non lineari sull'andamento di  $\sigma^2$  verso  $Q$  in fig. 6.12.

Discutiamo ora le misure di rumore in funzione di  $Q_{\text{int}}$ . Sia nel Fit 3 (test  $k=0.15$ ) che nel Fit 4 (test  $k=0.56$ ) l'intercetta è compatibile entro l'errore con il valore del rumore termico dedotto dalla (5.3) e dalle misure di calibrazione. Nel Fit 3:

$$\sigma_T^2(\text{atteso}) = (2.4 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} \text{ V}^2$$

$$a = (2.3 \pm 0.2) \cdot 10^{-6} \text{ V}^2$$

nel Fit 4:

$$\sigma_T^2(\text{atteso}) = (3.88 \pm 0.03) \cdot 10^{-5} \text{ V}^2$$

$$a = (3.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-5} \text{ V}^2$$

Restano quindi verificati ancora una volta la presenza della sorgente di rumore associata alla parte dissipativa dell'oscillatore in accordo con il teorema di Nyquist entro gli errori di misura e di calibrazione, e il fatto che a basso fattore di qualità il rumore termico tende a diventare dominante su tutti gli altri contributi.

Osserviamo che la pendenza del Fit 3 è ancora zero entro l'errore. Il limite superiore  $\sigma^2/Q < 4 \cdot 10^{-13} \text{ V}^2$  per il rumore dipendente da Q ricavato in base all'incertezza sulla pendenza del Fit 3 conduce a due considerazioni: in primo luogo il rumore in flusso è trascurabile entro l'errore rispetto al rumore termico, dimostrando che le condizioni di elevato isolamento elettromagnetico-vibrazionale già evidenziate a basso accoppiamento sono ben riproducibili. La seconda considerazione è che a questo livello di accoppiamento il contributo di back action dello SQUID non è ancora ben identificabile: a tale proposito possiamo stabilire in base alle (5.3) e all'incertezza sulla pendenza del fit un limite superiore alla densità spettrale del rumore in tensione  $S_e$ :

$$S_e < 4 \cdot 10^{-29} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$$

La pendenza del Fit 4 (fig. 6.16) è invece chiaramente diversa da zero. La riproducibilità delle condizioni di elevato isolamento già mostrata nei test precedenti permette di affermare con una sufficiente confidenza che la componente del rumore proporzionale a Q è interamente attribuibile entro l'errore al rumore di back action dello SQUID. Dal valore della pendenza ricavato dal fit e dalla (5.3) possiamo ricavare il valore della densità spettrale in tensione  $S_e$ :

$$S_e = (1.7 \pm 0.2) \cdot 10^{-29} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$$

Osserviamo che tale valore non è in contraddizione con il limite superiore di  $4 \cdot 10^{-29} \text{ V}^2/\text{Hz}$  imposto sulla base dei dati del Fit 3.

Il valore di  $S_e$  così misurato può essere ora confrontato con la previsione teorica riassunta nelle equazioni (2.10),(2.11) ovvero:

$$S_e = (\omega_0 L_N)^2 S_i, \quad L_N \approx L_I \quad (6.3)$$

A questo proposito sono necessarie alcune considerazioni circa il valore di  $S_i$  da inserire nell'equazione (6.3). Il rumore a banda larga all'uscita dallo SQUID è dato in generale dalla somma di un contributo intrinseco prodotto ai capi dello SQUID e di un contributo aggiunto dall'elettronica. La relazione (6.3) è stata derivata considerando il solo il rumore intrinseco dello SQUID, dunque è necessario trovare un modo per distinguere i due contributi. Il rumore intrinseco è prodotto termicamente nelle resistenze di shunt delle giunzioni Josephson e quindi una caratteristica che permette di distinguerlo dal rumore elettronico è la dipendenza lineare dalla temperatura del sensore.

Le misure di rumore a banda larga realizzate alle varie temperature riportate in tab.6.3 e fig. 6.8 mostrano in effetti un andamento lineare del rumore in funzione della temperatura con un evidente residuo che rimane estrapolando allo zero assoluto. I risultati sono qualitativamente in accordo con analoghe misure effettuate in passato su un dc SQUID Quantum Design dello stesso tipo [16]. Per quanto riguarda la pendenza dedotta dal Fit 2 l'accordo con tali misure è anche quantitativo, visto che nel lavoro citato è riportata una pendenza in temperatura di  $470 \hbar / K$ .

Supporremo, in base alle precedenti considerazioni e in accordo con quanto sostenuto in [16] che la componente di rumore indipendente dalla temperatura sia di origine elettronica: si può allora ricavare dai parametri ricavati dal Fit 2 un contributo dipendente dalla temperatura a 4.2 K di  $(2100 \pm 200) \hbar$  che corrisponde in base alla (2.9) a una densità spettrale del rumore in corrente intrinseco:

$$S_i = (1.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-25} \frac{A^2}{Hz}$$

La corrispondente densità spettrale del rumore in tensione attesa in base alla (6.3) è data allora da:

$$S_e(\text{atteso}) = (1.8 \pm 0.2) \cdot 10^{-29} \frac{\text{V}^2}{\text{Hz}}$$

Tale valore coincide entro la barra d'errore del 10 % con il valore che è stato misurato.

## 7 Conclusioni

Il risultato principale di questo esperimento è stata la misura del rumore di back action di un dc SQUID: il valore è consistente con la previsione teorica ricavata dai modelli teorici (cap. 2).

Questa è a nostra conoscenza la prima misura di back action di un dc SQUID a basso rumore, cioè di un dc SQUID che non è stato fabbricato “ad hoc” come nella misura di Martinis e Clarke [5]: in tale occasione le resistenze di shunt delle giunzioni erano state artificialmente ridotte di due ordini di grandezza per aumentare il rumore e consentirne la misurazione.

Il metodo da noi adottato permette di misurare e caratterizzare il rumore di back action del dc SQUID alle frequenze di interesse per i rivelatori risonanti di onde gravitazionali ( $\nu \sim 1\text{kHz}$ ), esperimenti in cui gli effetti di back action sono o possono diventare importanti. E' inoltre possibile in linea di principio applicare lo stesso metodo per misurare la back action di amplificatori di altro tipo, come ad esempio amplificatori a FET raffreddati o a temperatura ambiente.

La misura di back action fornisce informazioni molto più precise sul rumore intrinseco del sensore SQUID rispetto alla misura del rumore a banda larga. E' stato infatti verificato (fig. 6.8) che nel dc SQUID esaminato un contributo sostanziale al rumore a banda larga è prodotto dall'elettronica di controllo: questo contributo può essere identificato variando la temperatura. In determinate condizioni sperimentali può essere però più semplice misurare direttamente la back action e ricavare il rumore a banda larga intrinseco e quindi la risoluzione in energia del sensore dalla relazione (6.3).

Sono in corso ulteriori misure per caratterizzare in maniera completa il rumore di back action del dc SQUID Quantum Design in un range più ampio di temperature e frequenze: si potrà valutare così con maggiore precisione

l'accordo fra il modello teorico e i dati sperimentali e si potranno mettere in luce le eventuali discrepanze.

Nel frattempo, basandosi sui dati misurati in questo esperimento, è stato dimostrato [17] che il contributo della back action dello SQUID<sup>4</sup> al rumore totale dei modi oscillatori meccanici del rivelatore AURIGA è allo stato attuale trascurabile rispetto al rumore termico.

---

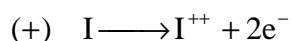
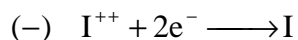
<sup>4</sup> Il rivelatore AURIGA è dotato di un dc SQUID Quantum Design dello stesso modello di quello esaminato in questo lavoro di tesi.

## Appendice A: Elettrodeposizione degli schermi superconduttori

Gli elementi principali dell'apparato sperimentale sono stati ricoperti per elettrodeposizione con un film superconduttore in stagno-piombo. La lega, Sn40%Pb60%, è stata scelta per le sue note proprietà di superconduttore "hard" [18], cioè per la sua elevata capacità di congelare i vortici quantizzati (flussoni) abbassando di conseguenza le dissipazioni per sono causate dal moto dei vortici stessi in direzione ortogonale alle supercorrenti.

Descriviamo sommariamente la procedura che è stata seguita. Inizialmente ha luogo una fase di preparazione in cui il pezzo da ricoprire viene accuratamente pulito e sgrassato, prima con acqua e sapone poi con acido citrico diluito. Al termine di queste operazioni si immerge completamente il pezzo in un recipiente contenente la soluzione di fluoroborato di stagno-piombo in cui avverrà l'elettrodeposizione assieme ad un elettrodo di Sn7%Pb che viene realizzato a partire da un foglio e sagomato ad arte in modo tale da seguire il più fedelmente possibile la forma del pezzo.

Successivamente pezzo ed elettrodo vengono collegati rispettivamente ai poli negativo e positivo di un generatore di corrente continua<sup>1</sup>. Ai due elettrodi così realizzati avvengono quindi al passaggio della corrente le seguenti reazioni:



---

<sup>1</sup> Modello HP6030A

dove con I si indica una delle due specie Sn o Pb. Gli ioni  $\text{Sn}^{++}$  e  $\text{Pb}^{++}$  presenti in soluzione vanno a depositarsi sul pezzo mentre l'elettrodo di SnPb si scioglie progressivamente per mantenere bilanciate le concentrazioni. Gli altri ioni presenti nella soluzione ( $\text{BF}_4^-$ ,  $\text{OH}^-$ ,  $\text{H}^+$ ) non partecipano alla reazione se la corrente non supera una soglia critica, perchè sono cortocircuitati dagli ioni  $\text{Sn}^{++}$  e  $\text{Pb}^{++}$ .

La reazione avviene sotto cappa aspirante<sup>2</sup> per ovvi motivi di sicurezza. Durante la deposizione è necessario a intervalli regolari muovere opportunamente il pezzo per spostare il punto in cui avviene il contatto elettrico con il filo proveniente dal generatore; è evidente infatti che tale punto non viene depositato e quindi senza questo accorgimento rimarrebbe una fessura nella schermatura superconduttrice.

Al termine dell'elettrodeposizione il pezzo viene estratto dalla soluzione e sottoposto ad una serie di sciacqui in appositi recipienti, nell'ordine in acqua deionizzata (in 2 recipienti distinti), in acido citrico diluito, ancora in acqua deionizzata e infine in alcool etilico con successiva asciugatura rapida mediante pistola ad azoto. I primi sciacqui hanno la funzione di eliminare i residui della soluzione, mentre l'ultimo passaggio in alcool etilico serve per rendere esteticamente più uniforme il risultato finale, evitando le caratteristiche tracce che si formano asciugando il pezzo dopo i soli passaggi in acqua.

Il valore della corrente durante l'elettrodeposizione è stato scelto in modo che la corrente per unità di superficie, che è proporzionale alla velocità di accrescimento del film, fosse pari a  $0.4 \text{ A/dm}^2$ ; tale valore dovrebbe essere sufficientemente basso da rendere uniforme la deposizione ed evitare fenomeni collaterali come la partecipazione degli altri ioni in soluzione alla reazione. In un test effettuato su un campione di prova si è

---

<sup>2</sup> La cappa aspirante e l'acqua deionizzata sono state messe a disposizione dal CMBM.



trovato che c'è effettivamente una soglia critica attorno ai 2 A/dm<sup>2</sup> oltre la quale la reazione cambia regime e produce emissione di gas.

Per i pezzi più importanti ai fini del conseguimento di alti fattori di qualità, vale a dire scatola interna e pezzo di sostegno dei condensatori, è stato inoltre usato un invertitore che inverte per 2 secondi il verso della corrente e lo mantiene per 6 secondi nel verso corretto: tale accorgimento riduce del 50% la velocità di deposizione ma dovrebbe permettere di ottenere un film più omogeneo.

Valutiamo ora approssimativamente lo spessore dello strato depositato in funzione della corrente I applicata, della durata t della deposizione e della superficie A del pezzo ricoperto. A tal fine basta imporre che ad ogni atomo depositato corrisponda la carica trasportata da uno ione:

$$\frac{\rho A d}{m_A} = \frac{I t}{2e} \quad (A1)$$

Il membro di sinistra rappresenta il numero di atomi depositati in funzione dello spessore medio d, della densità  $\rho$  e della massa atomica media  $m_A$  mentre il membro di destra rappresenta la carica totale trasportata in unità di 2e. Nel caso specifico della lega Sn40%Pb60% si hanno i valori  $m_A=2.9 \cdot 10^{-22}$  g e  $\rho=9.4$ g/cm<sup>3</sup> per cui la formula (A1) può essere riscritta, usando unità di misura "comode":

$$d(\mu\text{m}) = \frac{I(\text{A})t(\text{sec})}{A(\text{cm}^2)} \cdot 3400 \cdot [\text{efficienza}] \quad (A2)$$

L'efficienza è 1 o 0.5 a seconda se è usato o meno l'invertitore di corrente.

Per mezzo della formula (A2) si è quindi valutato il tempo necessario affinché lo spessore medio depositato fosse dell'ordine di 30-40  $\mu\text{m}$ .



## Appendice B: Dissipazioni di un cilindro conduttore in un campo magnetico oscillante

Sia dato un cilindro conduttore di raggio  $r$ , lunghezza  $l$  e conducibilità  $\sigma$ , immerso in un campo magnetico oscillante  $B=B_0\text{sen}(\omega t)$  diretto lungo il suo asse.

Vogliamo trovare la potenza  $W$  dissipata nel cilindro dalle correnti parassite indotte dal campo magnetico.

Sia  $\delta$  la profondità di penetrazione del campo magnetico, definita da:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \quad (\text{B1})$$

dove  $\mu$  è la permeabilità magnetica del materiale, che possiamo porre uguale a  $\mu_0$  se il materiale non è ferromagnetico.

Il caso  $r \ll \delta$  è risolvibile analiticamente, mentre nel caso generale bisogna tener conto dell'effetto di schermaggio degli strati esterni che abbassa il campo effettivo negli strati interni.

Il problema generale è stato risolto numericamente da [19], utilizzando un algoritmo basato sull'analisi agli elementi finiti; possiamo riassumere i risultati nella formula:

$$W = P_N \frac{\pi r(r+1)\delta\omega B_0^2}{2\mu} \quad (\text{B2})$$

dove  $P_N$  rappresenta una potenza normalizzata che dipende dai rapporti  $r/\delta$  e  $l/r$  e che è riportata graficamente su ref. [19].

Supponiamo ora che il campo magnetico oscillante sia prodotto da un solenoide che costituisce l'induttanza  $L$  di un oscillatore LC: l'energia  $E$

immagazzinata nell'oscillatore è data da  $E = \frac{1}{2}LI_0^2$ , dove  $I_0$  è il valore di picco della corrente.

Nell'ipotesi che le altre fonti di dissipazione siano trascurabili si può determinare allora il fattore di qualità dell'oscillatore dall'espressione:

$$Q = \frac{\omega E}{W} = \frac{\mu L}{\pi r(r+l)\delta P_N} \left( \frac{I_0}{B_0} \right)^2 \quad (B3)$$

Nel caso particolare  $R \ll \delta$  potenza dissipata e fattore di qualità sono dati rispettivamente da:

$$W = \frac{\pi r^4 l \omega B_0^2}{8 \delta^2 \mu} \quad (B4)$$

$$Q = \frac{4 \mu \delta^2 L}{\pi r^4 l} \left( \frac{I_0}{B_0} \right)^2$$

Il dissipatore usato nell'esperimento ha  $r=1\text{mm}$  e  $l=15\text{mm}$ . Cerchiamo ora di stimare il  $Q$  atteso quando il dissipatore si trova al centro della bobina.

Il rame ha una conducibilità a 4.2 K che è stata misurata direttamente a partire dalla resistenza di un filo di lunghezza 60m e diametro 100  $\mu\text{m}$ : si è ottenuto un valore  $\sigma = (5.9 \pm 0.2) \cdot 10^9 \text{ } \Omega\text{m}^{-1}$ . Assumendo l'ipotesi che la conducibilità del dissipatore sia uguale a quella del filo di rame si trova che alla frequenza di lavoro dell'oscillatore a basso accoppiamento ( $\nu_0=926.77$  Hz) il parametro di penetrazione è dato da  $\delta = (0.23 \pm 0.01) \text{ mm}$ .

Non siamo quindi nell'ipotesi  $r \ll \delta$  e dobbiamo usare la formula generale (B3) per determinare il  $Q$  atteso quando il dissipatore è tutto inserito.

Da ref. [19] si trova che nelle condizioni di lavoro  $P_N = 0.9 \pm 0.1$ .

Il rapporto campo/corrente al centro della bobina è stato misurato a partire dalla misura di mutua induzione del pick-up di raggio  $r=4 \text{ mm}$  usato nel primo run sperimentale, che era situato quasi nel centro della bobina. Si è

trovato  $M=(2.8 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$  H da cui, supponendo uniforme il campo che attraversa il pick-up e usando la relazione:

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{B\pi r^2}{I} \quad (B5)$$

si ottiene un rapporto corrente/campo  $I/B=(18 \pm 1)$  A/Tesla.

Inserendo tutti i parametri nell'equazione (B3) si ottiene infine per il Q atteso il valore  $Q=(22000 \pm 3000)$  che è compatibile col valore misurato  $Q=21000$ .

Nell'ambito di questo esperimento il calcolo è stato fatto solo per poter avere delle utili indicazioni sulle misure da scegliere per il dissipatore, che doveva consentire nelle intenzioni di ottenere fattori di qualità minimi dell'ordine di  $10^4$ . Tuttavia il sistema realizzato potrebbe permettere, dopo un'opportuna calibrazione e ottimizzazione del metodo di misura, di effettuare misure di conducibilità elettrica su campioni di vario tipo e varia forma; si evitano gli errori sistematici tipici di misure di questo tipo, perché la misura è effettuata senza contatto con il campione ed evita quindi i cammini percolativi delle correnti in corrispondenza dei punti di contatto. Inoltre risulta possibile misurare la conducibilità di campioni di dimensioni molto piccole, cosa molto difficile da fare con tecniche tradizionali soprattutto se la conducibilità è molto elevata.

In definitiva ciò risulta possibile grazie al fatto che tutte le altre fonti di dissipazione nell'oscillatore sono state ridotte a valori piccolissimi.



## Appendice C: Filtraggio del lock-in

La generica fase X o Y di un lock-in viene costruita in due passi successivi:

- 1) una modulazione, effettuata da un PSD ( Phase Sensitive Detector) in cui il segnale in ingresso, con spettro  $S_{in}$ , viene mixato con il segnale di reference  $A\cos(\omega_{lk}t)$ .
- 2) un filtro passa basso semplice in uscita con costante di tempo  $\tau_{lk}$  che elimina le componenti ad alta frequenza prodotte dalla modulazione.

Lo spettro di potenza della singola fase all'uscita dal lock-in è legato allo spettro del segnale in ingresso da una relazione del tipo:

$$S_{out} = \frac{1}{2} \frac{S_{in}(\omega_{lk} - \omega) + S_{in}(\omega_{lk} + \omega)}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (C1)$$

Le due fasi X e Y si distinguono in quanto sono costruite sfasando il segnale di reference di  $90^\circ$  dall'una dall'altra: in questo modo si ottengono le componenti del segnale all'interno della banda determinata dal filtro che sono rispettivamente in fase e in quadratura con la reference.

E' più naturale caratterizzare l'uscita del lock-in mediante l'ampiezza  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  e lo sfasamento  $\varphi = \arg(Y/X)$ : R è effettivamente proporzionale all'ampiezza della parte del segnale in ingresso "in banda".

Consideriamo ora il rumore in ingresso a spettro lorentziano proveniente dall'oscillatore e supponiamo per semplicità  $\omega_0 = \omega_{lk}$ :

$$S_{in} \propto \frac{1}{\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (C2)$$

Applicando la (C1) si trova che lo spettro della fase X ( o Y ) ha la forma:

$$S_{\text{out}} \propto \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \cdot \frac{1}{1+(\omega\tau_{\text{lk}})^2} \quad (\text{C3})$$

dove  $\tau = 2Q / \omega_0$  è la costante di decadimento dell'oscillatore.

La varianza della fase X ( o Y ) risulta essere proporzionale a:

$$\sigma_X^2 \propto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\omega\tau)^2} \frac{1}{1+(\omega\tau_{\text{lk}})^2} d\omega = \frac{\pi}{\tau + \tau_{\text{lk}}} \quad (\text{C4})$$

Evidentemente anche la grandezza  $\langle R^2 \rangle = 2\sigma_X^2$  è proporzionale allo stesso termine.

Se la banda del lock-in è molto maggiore della banda dell'oscillatore, cioè  $\tau \gg \tau_{\text{lk}}$ , l'effetto di taglio del filtro deve essere trascurabile e quindi ci si aspetta  $\langle R^2 \rangle = \langle V_{\text{in}}^2 \rangle$ : questo significa che l'uscita del lock-in con un segnale  $A\cos(\omega_0 t)$  in ingresso è il valore efficace  $A/\sqrt{2}$ , condizione che è stata verificata sul lock-in usato nelle prove sperimentali.

Tenendo conto di questa condizione e della (C4) è facile verificare che deve essere:

$$\langle R^2 \rangle = \langle V_{\text{IN}}^2 \rangle \frac{\tau}{\tau + \tau_{\text{lk}}} \quad (\text{C5})$$

La (C5) è stata dimostrata nell'ipotesi  $\omega_{\text{lk}} = \omega_0$  ma è sempre valida in prima approssimazione sotto la condizione:

$$|\omega_{\text{lk}} - \omega_0| \ll \frac{1}{\tau_{\text{lk}}} \quad (\text{C6})$$

Supponiamo ora di avere in ingresso rumore bianco con densità spettrale di potenza  $S_V$  in ingresso. In questo caso il calcolo attraverso la formula (C1) è immediato:

$$\langle R^2 \rangle = 2S_V \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(\omega\tau_{\text{lk}})^2} d\omega = \frac{S_V}{\tau_{\text{lk}}} \quad (\text{C7})$$



## Bibliografia

- [1] R.P. Giffard, *Phys. Rev. D* **14**, 2478 (1976)
- [2] J.C. Price, *Phys. Rev. D* **36**, 3555 (1987)
- [3] M.Cerdonio, P.Falferi, G.A.Prodi, A.Ortolan, S.Vitale, J.P.Zendri, *Physica B* **194-196**, 3 (1994)
- [4] M.Bonaldi, P.Falferi, R.Dolesi, S.Vitale, M.Cerdonio, *Proc. of the III European Conf. On Appl. Superconductivity (Eindhoven 1997)*, Institute of Physics Conference Series 158, p. 303 (IOP 1997)
- [5] J.Martinis, J. Clarke, *J. Low Temp. Phys.* **65**, 459 (1986)
- [6] W.C.Stewart, *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277-280 (1968)
- [7] C.D.Tesche, J. Clarke, *J. Low Temp. Phys.* **27**, 301 (1979)
- [8] C.D.Tesche, J. Clarke, *J. Low Temp. Phys.* **37**, 397 (1977)
- [9] C.Hilbert, J. Clarke, *J. Low Temp. Phys.* **61**, 237 (1985)
- [10] P.Falferi, R.Mezzena, M.Cerdonio and S.Vitale, *Appl. Phys. Lett.* **71**, 956 (1997)
- [11] W.M.Folkner, M.V. Moody, J.-P. Richard, K.R.Carroll and C.D.Tesche, *J. Appl. Phys.* **65**, 5190 (1989)
- [12] B. Cabrera, W.O. Hamilton, *Science and Technology of Superconductivity*, Plenum Press, N.Y. (1973)
- [13] P.Falferi, M.Cerdonio, L.Franceschini, R.Macchietto, S.Vitale and J.P.Zendri, *Rev. Sci. Instrum.* **65**, 2916 (1994)
- [14] F. Ayela, J.L. Bret and J.Chaussy, *Cryogenics* **32**, 35 (1992)
- [15] M.Bonaldi, R.Dolesi, *Cryogenics* **32**, 379 (1992)

- [16] Z.K.Geng, P.W.Adams, W.O.Hamilton, W.W.Johnson and N.D.Solomonson *Rev. Sci. Instrum.* **65**, 2916 (1994)
- [17] P.Falferi, J.P.Zendri, *Comunicazione privata*
- [18] Y.Sasaki, P.Falferi, S.Vitale 1993 *STEP Symposium* R.Reinhard ed. (ESA Publications Division 1996)
- [19] T.H.Fawzi, K.F.Ali, P.E.Burke, *IEEE Trans. on Magnetics* **19**, 2216 (1983)